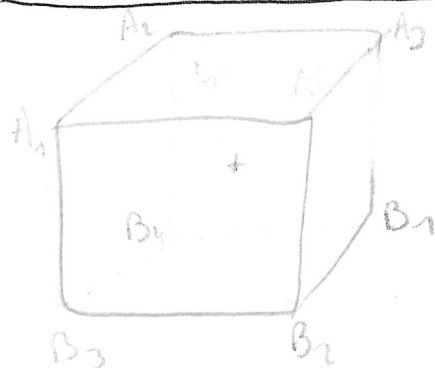


Isométrie du cube et colorings.



Théorème: Les groupes d'isométries du cube sont

- $Is^+(C_6) \approx S_4$
- $Is(C_6) \approx S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Proposition: Le nombre de colorations du cube à isométrie positive près est $\frac{1}{24}(c^6 + 8c^2 + 6c^3 + 3c^4 + 6c^3)$ pour c couleurs.

101
104
161
105
190?
191
181?

- plan:
- 1) $\exists$ un morphisme $\varphi: Is^+(\mathcal{C}) \rightarrow S_4$.
 - 2) Injectivité de φ
 - 3) Surjectivité de φ
 - 4) $Is(\mathcal{C}) \approx S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
 - 5) Nombre de colorations du cube à isométrie positive près

Quitte à translater, on suppose $\mathcal{C}$ le cube centré en O .

Pour $i \in \{1, 4\}$, on note $D_i = [A_i, B_i]$ les diagonales et on note D leur ensemble. Si $f \in Isom^+(\mathcal{C})$, comme f préserve les longueurs, il préserve D .

1) On fait agir $Is^+(\mathcal{C})$ sur D via $Is^+(\mathcal{C}) \times D \rightarrow D$
 $(g, D_i) \mapsto g(D_i)$

on en déduit un morphisme $\varphi: Is^+(\mathcal{C}) \rightarrow S(D)$.
 $g \mapsto (D_i \mapsto g(D_i))$

Comme $|D| = 4$,
 $S(D) \approx S_4$.

2) Soit $g \in Ker(\varphi)$

$\varphi(g) = Id_D$.

Donc $\forall i, \varphi(g)(D_i) = D_i$ en particulier pour i donné, g fixe A_i et B_i ou les permute.

19.49 Supposons que pour i fixé, g fixe A_i et B_i , on peut supposer $i=1$.

Montrons que $g = Id_{\mathbb{R}^3}$

g est une isométrie donc comme A_1 fixe, $g([A_1, A_4]) = [A_1, g(A_4)]$
 et $A_1 A_4 = A_1 g(A_4)$

Donc $g(A_4) \in \{A_4, A_2, B_2\}$

Mais g fixe $[A_4, B_4]$ donc $g(A_4) \in \{A_4, B_4\}$

D'où $g(A_4) = A_4$.

De même $g([A_1, A_2]) = [A_1, g(A_2)]$ et $g(A_1) = A_1$.

Donc g fixe le repère affine (A_1, A_4, B_1, A_2)

D'où $g = Id_{\mathbb{R}^3}$.

19.50 On suppose pour i fixé que g permute A_i et B_i .

On note S_0 la symétrie centrale du cube

Alors $S_0 g = Id_{\mathbb{R}^3}$ donc $det(g) = -1$ donc $g \in Is^-(\mathcal{C})$ d'où $g \notin Is^+(\mathcal{C})$.

Donc $\text{Res}(\varphi) = \{ \text{Id}_{\mathbb{R}^3} \}$ et φ injectif.

3) Comme les transpositions engendrent $S(4)$, il suffit de montrer que toute transposition est l'image par φ
i.e. associée à une isométrie positive du cube.

Prendons D_i et D_j deux diagonales, la rotation d'angle π et d'axe le milieu des arêtes joignant les deux diagonales permet la transposition (D_i, D_j)

Donc φ est isomorphe

$$\text{d'où } \text{Is}^+(\varphi) \cong S_4.$$

4) $\text{Is}(\varphi) \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ car : $\text{Is}^+(\varphi) \rightarrow \text{Is}^-(\varphi)$ bij de réciproque $\text{Is}^-(\varphi) \rightarrow \text{Is}^+(\varphi)$
 $f \mapsto f \circ s_0$ $f \mapsto f \circ s_0$

comme $\varphi(s_0) = \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ on a donc l'isomorphisme naturel :

$$\begin{aligned} \text{Is}(\varphi) &\rightarrow \widehat{S_4}^{\text{Is}(\varphi)} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong S_4 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \\ g &\mapsto \begin{cases} (\varphi(g), 0) \text{ si } g \in \text{Is}^+(\varphi) \\ (\varphi(g), 1) \text{ si } g \in \text{Is}^-(\varphi) \end{cases} \end{aligned}$$

5) Soit $c \in \mathbb{N}^*$ le nombre de couleurs
2 colorations sont les mêmes si f est positive passant de l'un à l'autre.

On fait agir $\text{Is}^+(\varphi)$ sur les cubes colorés

On cherche à déterminer le nombre d'orbites par cette action

La formule de Burnside nous donne :

$$\text{nombre d'orbites } \mathcal{C}_c = \frac{1}{|\text{Is}^+(\varphi)|} \sum_{\sigma \in \text{Is}^+(\varphi)} |\text{Fix}(\sigma)|.$$

Cherchons les liens entre isométries et permutations de S_4 .

1) Transposition : permet de faire 3 paires de face de m colorations

$$\Rightarrow c^3 \text{ possibilités}$$



6 paires de diag

$$\Rightarrow 6 \text{ isométries}$$

2) 3-Cycles : permet de faire 2 paires de 3 faces de m colorations

$$\Rightarrow c^2 \text{ possibilités}$$



On a donc pour 8 isométries car 4 diag et d'ordre 2.

3) 4-cycles : Les deux faces opposées sont fixées

Ensuite cela forme 4 faces de m couleurs

$$\Rightarrow c^3 \text{ possibilités}$$



6 isométries car 6 rotations.

4) Double transposition : Les deux faces opposées sont fixées

Ensuite il reste deux paires de 2 faces

$$\Rightarrow c^4 \text{ possibilités}$$

Il y a 3 isométries positives.



$$\text{Finalement : } \mathcal{C}_c = \frac{1}{24} (c^6 + 3c^4 + 6c^3 + 8c^2 + 6c)$$