149
157
15?

Ref : Gourdon

Matrice et déterminant de Gram.

Définition : Soit E un espace préhilbertien et $x_1, \dots, x_n$ n vecteurs de E. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On appelle matrice de Gram de $x_1, \dots, x_n$ la matrice $[(x_i \cdot x_j)]_{1 \leq i,j \leq n}$
et déterminant de Gram le déterminant de cette matrice noté $G(x_1, \dots, x_n)$.

Proposition : Toute matrice de Gram est hermitienne positive.
Réciproquement, toute matrice hermitienne positive est une matrice de Gram.
De plus la matrice de Gram de n vecteurs $x_1, \dots, x_n$ est définie ssi $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre.

Théorème : Soit E un préhilbertien, V un sous espace de E muni d'une base $(e_1, \dots, e_n)$.
Soit $x \in E$, alors la distance d de x à V vérifie $d^2 = \dfrac{G(e_1, \dots, e_n, x)}{G(e_1, \dots, e_n)}$.

plan : 1) $\boxed{\Rightarrow}$ de prop
2) $\boxed{\Leftarrow}$ de prop
3) Cas ~~d'égalité~~ définition (de Rq)
4) preuve théorème.

---

1) Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs d'un espace préhilbertien E et M leur matrice de Gram. Soit $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $m = \dim F$.
Soit $\mathcal{B}$ une base de F. $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $X_i :=$ vecteur colonne de coordonnées de x_i dans $\mathcal{B}$.
On a $x_i \cdot x_j = X_i^* X_j$.
Donc $M = N^* N$ où N désigne la matrice $m \times n$ dont les colonnes sont les X_i.
Donc $M \in M_n(\mathbb{K})$ est hermitienne : $M^* = N^* N^{**} = N^* N = M$.
et positive : $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$, $X^* M X = (X^* N^*)(N X)$
$= (NX)^*(NX)$
$= \|NX\|^2 \geq 0$ où $\|\cdot\|$ norme euclidienne.

2) Réciproquement, soit $M = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice hermitienne positive.
On dispose d'une matrice hermitienne $H \in M_n(\mathbb{K})$ tq $M = H^2 = H^* H$.
En effet, comme M est hermitienne, on dispose de C unitaire telle que
$${}^t\bar{C} M C = C^{-1} M C = D := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$
Comme M est positive, les λ_i sont ≥ 0.
On pose $D' = \begin{pmatrix} \mu_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \mu_n \end{pmatrix}$ où $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$.
On a donc $D'^2 = D$ et $H := C D' C^{-1} = C D' C^*$ est hermitienne positive et vérifie $H^2 = M$.
(Rq il y a même unicité).
Si on désigne les vecteurs colonnes de H par $X_1, \dots, X_n$.

La relation $M = N^* N$ implique que $a_{i,j} = X_i^* X_j = x_i \cdot x_j$.

M est donc bien une matrice de Gram.

3) Soit M une matrice de Gram. M est définie ssi $(X^* M X = 0 \Rightarrow X = 0)$.

Avec les même notations que ci-dessus, $X^* M X = \|NX\|^2$.

Donc M est définie ssi $(\|NX\|^2 = 0 \Rightarrow X = 0)$.

i.e. $\ker N = \{0\}$

i.e. les $(x_i)_{1 \le i \le n}$ forment une famille libre.

4). On note y la projection orthogonale de x sur V.

On note $z = x - y$.

Alors $d = \|z\|$.

Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $e_i \cdot y = e_i \cdot x$ et $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

$$\text{Donc } M = \left(\begin{array}{ccc|c} e_1\cdot e_1 & \cdots & e_1\cdot e_n & e_1\cdot x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_n\cdot e_1 & \cdots & e_n\cdot e_n & e_n\cdot x \\ \hline x\cdot e_1 & \cdots & x\cdot e_n & x\cdot x \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} e_1\cdot e_1 & \cdots & e_1\cdot e_n & e_1\cdot y \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_n\cdot e_1 & \cdots & e_n\cdot e_n & e_n\cdot y \\ \hline y\cdot e_1 & \cdots & y\cdot e_n & \|y\|^2+\|z\|^2 \end{array}\right)$$

La linéarité de $\det M$ par rapport à sa dernière colonne entraîne $\det M = \det P + \det Q$

$$\text{où } P = \left(\begin{array}{ccc|c} e_1\cdot e_1 & \cdots & e_1\cdot e_n & e_1\cdot y \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_n\cdot e_1 & \cdots & e_n\cdot e_n & e_n\cdot y \\ \hline y\cdot e_1 & \cdots & y\cdot e_n & \|y\|^2 \end{array}\right) \text{ et } Q = \left(\begin{array}{ccc|c} e_1\cdot e_1 & \cdots & e_1\cdot e_n & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ e_n\cdot e_1 & \cdots & e_n\cdot e_n & 0 \\ \hline y\cdot e_1 & \cdots & y\cdot e_n & \|z\|^2 \end{array}\right)$$

Or $\det P = G(e_1, \dots, e_n, y) = 0$ car $y \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$

et $\det Q = \|z\|^2 G(e_1, \dots, e_n)$

Finalement, $G(e_1, \dots, e_n, x) = \det M$

$= \det Q$

$= \|z\|^2 G(e_1, \dots, e_n)$

$= d^2 G(e_1, \dots, e_n)$.