

Théorème: Soient E un ev réel de dimension finie n , q une forme quadratique sur E .
 Supposons q définie positive.
 $O(E)$ est engendré par les réflexions orthogonales, plus précisément, si u est dans $O(E)$,
 u est produit d'un plus n réflexions.
 $n \geq 3$:
 $SO(E)$ est engendré par les renversements, plus précisément, si u est dans $SO(E)$ u est
 produit d'un plus n renversements.

108
128
106
170
171
161
148
(151)
181

Lemme: Soient $n \geq 3$ et τ_1, τ_2 deux réflexions, $\exists \sigma_1, \sigma_2$ renversements tq $\tau_1 \tau_2 = \sigma_1 \sigma_2$.

- plan:
- 1) preuve pour $O(E)$
 - 2) preuve pour $SO(E)$ et $n=3$
 - 3) preuve du lemme
 - 4) preuve pour $SO(E)$ et $n \geq 3$.

1) Soient $u \in O(E)$ et $F_u = \{x \in E, u(x) = x\}$ l'espace des points fixes de u .
 On pose $p_u = n - \dim F_u$.
 On u est produit d'un plus p_u réflexions.

Récurrence sur p_u :

- Si $p_u = 0$, $u = Id$, on dit qu'un produit vide de réflexions = Id .
- Si $p_u > 0$. Supposons que $\forall u' \in O(E)$ tq $\dim F_{u'} > \dim F_u$
 i.e. $p_{u'} < p_u$, u' est produit d'un plus $p_{u'}$ réflexions.

Soit $x \in F_u^\perp$ tq $x \neq 0$.
 Soit $y = u(x)$.
 Comme $x \notin F_u$, $y \neq x$ et $y \in F_u^\perp$ car F_u (donc $F_u^\perp$) est stable par u .
 De plus $\|x\| = \|y\|$ donc $(x+y | x-y) = 0$
 donc $x-y \perp x+y$.

On pose τ la réflexion: $x-y \mapsto y-x$
 $x+y \mapsto x+y$

donc $\tau(y) = x$.
 De plus comme $x-y \in F_u^\perp$, on a $\tau|_{F_u} = Id$.

Donc $F_u \subseteq F_{\tau u}$
 Comme $x \in F_{\tau u} \setminus F_u$, $p_{\tau u} < p_u$. C'est ici qu'on utilise qu'il n'y a pas de vecteur isolé.

Par HR, $\tau u = \tau_1 \dots \tau_r$ où τ_i réflexions et $r \leq p_{\tau u}$

Donc $u = \tau \tau_1 \dots \tau_r$

Comme $r+1 \leq p_u$ on peut que u est produit d'un plus p_u réflexions.

Comme $p_u \leq n$, le théorème est démontré.

2) Pour $n=3$.

Si $u \neq \text{Id}$, $u = \tau_1 \tau_2$ où τ_1 et τ_2 sont des réflexions

Car $\det(u) = 1$ et $\det(\text{reflexions}) = -1$.

Comme $n=3$, $-\tau_i = \sigma_i$ est un renversement

Donc $u = \sigma_1 \sigma_2$.

$$\hookrightarrow \dim \ker(u - \text{Id}) = n - 2.$$

3) Posons $u = \tau_1 \tau_2$.

Soient H_1, H_2 les hyperplans de τ_1, τ_2

Soit V un sous-espace de dim $n-3$ de $H_1 \cap H_2 \leftarrow \dim \geq n-2$

Donc $u|_V = \text{Id}$.

Donc $u(V^\perp) \subset V^\perp$

D'après 2), $u|_{V^\perp} = \sigma_1 \sigma_2$ où σ_i est un renversement de $V^\perp$

On obtient le résultat en prolongeant les σ_i par Id sur V .

4) Pour $u \in \text{SO}(E)$, $u = \tau_1 \dots \tau_{2p}$ avec $2p = n$.

τ_i étant des réflexions

On conclut avec le lemme.