

Exponentielle est un homéomorphisme de $S_n(\mathbb{R})$ vers $S_n^{++}(\mathbb{R})$ R. Calderón - Gómez

- plan: 1) Montrer la c.o. de $S_n(\mathbb{R}) \rightarrow S_n^{++}(\mathbb{R})$.
2) My surjectif.
3) My injectif.
4) My bicontinu.

152
155
157
158
(203)
153.

1) Soit $S \in S_n(\mathbb{R})$.

D'après le théorème spectral, on dispose de $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i) \in \mathbb{R}^n$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$

$$\text{On a } \exp(S) = P \text{diag}(e^{\lambda_i}) P^{-1} \\ = P \text{diag}(e^{\lambda_i}) P$$

Comme $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $e^{\lambda_i} > 0 \forall i \in \{1, n\}$, $\exp(S) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

Comme l'exponentielle est continue de $M_n(\mathbb{R})$ dans $M_n(\mathbb{R})$ (cf convergence normale) et par restriction, elle reste continue.

2) Soit $B \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, on dispose de $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $\Lambda = \text{diag}(\mu_i)$ avec $\mu_i > 0$
tq $B = P \text{diag}(\mu_i) P^{-1}$.

$A := P \text{diag}(\ln(\mu_i)) P^{-1}$ est symétrique et $\exp(A) = B$

3) Soient $A, A' \in S_n(\mathbb{R})$ tq $\exp(A) = \exp(A')$.

Soit Q un polynôme interpolateur de Lagrange tel que $Q(e^{\lambda_i}) = 1$,
où λ_i sont les valeurs propres de A .

Alors A' commute avec $Q(\exp(A)) = Q(\exp(A)) = A$.

Par diagonalisation simultanée car A et A' commutent et sont diagonalisables:

$$P \text{diag}(e^{\lambda_i}) P^{-1} = P \text{diag}(e^{\lambda'_i}) P^{-1}$$

$$\text{donc } \forall i \in \{1, n\}, e^{\lambda_i} = e^{\lambda'_i}$$

$$\text{donc } \forall i \in \{1, n\}, \lambda_i = \lambda'_i$$

$$\text{donc } A = A' \quad \text{car } A = P(\lambda_1 \dots \lambda_n) P^{-1} \quad \text{et } A' = P(\lambda'_1 \dots \lambda'_n) P^{-1}$$

4) Soit $(B_p)_{p \in \mathbb{N}} = (\exp(A_p))_{p \in \mathbb{N}}$ une suite de $S_n^{++}(\mathbb{R})$.

qui converge vers $B = \exp(A) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

On montre que $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} A$.

Comme elle converge, la suite (B_p) est bornée pour $\|\cdot\|_2$.

De même, par $\mathcal{C}^0$ du passage à l'inverse, (B_p^{-1}) converge vers B^{-1} , car B est inversible.
 Donc elle est bornée pour $\|\cdot\|_2$.
 polynomiale: $\frac{1}{\det(A)} \det(A)$ (on (A))

$$\begin{aligned} \text{Or, pour } M \in \text{Sym}^+(M), \text{ on a } \|M\|_2 &= \sqrt{\rho(M^2)} \\ &= \sqrt{\rho(M^2)} \\ &= \rho(M) = \max(\text{Sp}(M)) \end{aligned}$$

Donc tous les spectres de B_p sont majorés par une constante C .

De même, les spectres de B_p^{-1} sont minorés par une constante C' .

Donc toutes les ~~valeurs~~ valeurs propres des B_p sont contenues dans le compact $K = [C', C] \subset]0, +\infty[$.

Les valeurs propres de A_p , qui sont les $\ln$ des valeurs propres des B_p , sont dans le compact $[\ln C', \ln C]$ de $\mathbb{R}$.

Ainsi, la suite (A_p) est bornée pour $\|\cdot\|_2$.

On a seule valeur d'adhérence est A :

En effet, (A_{p_k}) une sous suite qui converge vers $\bar{A}$

Du fait que l'on a $\exp(A_{p_k}) = B_{p_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$

On a $\exp(\bar{A}) = B = \exp(A)$.

Par injectivité de $\exp$ sur $\text{Sym}^+(M)$, il vient $\bar{A} = A$.

Comme dans un espace vectoriel de dim finie, une suite bornée qui n'a qu'une valeur d'adhérence converge vers cette valeur d'adhérence.

On peut conclure.