

Réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents

Ref: Rouleau

148
151
154
156
159

Lemme 1: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$. $\forall x \in E$ où E un $\mathbb{K}$ -ev de dim finie, tq $u^{q-1}(x) \neq 0$, la famille $B_{u,x} = (u^i(x))$ est liée et l'espace vectoriel $F = \text{Vect}(B_{u,x})$ est stable par u .

Lemme 2: Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dim finie. Soit u un endomorphisme de E nilpotent d'ordre $q \geq 1$. $\exists \varphi \in E^*$ et $x \in E$ tels que l'ev $F = \text{Vect}(x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ et l'orthogonal G dans E de $H = \text{Vect}(\varphi, (u\varphi), \dots, (u^{q-1}\varphi))$ sont stables par u avec $E = F \oplus G$.

Théorème (pour nilpotent): Soient E un $\mathbb{K}$ -ev de dim finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent d'ordre $q \geq 1$.
 $\exists$ une base de E $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_r$ telle que chaque sous ev $E_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$ soit stable par u et la matrice de la restriction de u à E_i est: $J_i = \begin{pmatrix} 0 & & (0) \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}_{\dim E_i \times \dim E_i}$
 avec $q_i = \dim(E_i)$ $1 \leq i \leq r$.

1) Comme $u^{q-1} \neq 0$, on dispose de $x \in E \setminus \{0\}$ tq $u^{q-1}(x) \neq 0$.
 Supposons la famille $B_{u,x}$ est liée, on dispose de $\lambda_0, \dots, \lambda_{q-1}$ non tous-nuls tels que $\sum_{k=0}^{q-1} \lambda_k u^k(x) = 0$.
 Soit $p \in \mathbb{N}$ le plus petit entier entre 0 et $q-1$ tq $\lambda_p \neq 0$,
 on a $p \leq q-2$ puisque $u^{q-1}(x) \neq 0$.
 On note $\mu_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_p}$ $\forall k \in [p+1, q-1]$.
 On a $u^p(x) = \sum_{k=p+1}^{q-1} \mu_k u^k(x)$
 $= \sum_{j=1}^{q-1-p} \mu_{p+j} u^{p+j}(x)$
 et $u^{q-1}(x) = u^{q-1-p}(u^p(x))$
 $= \sum_{j=1}^{q-1-p} \mu_{p+j} u^{q+j-1}(x)$
 $= 0$.

($u^{q+k} = 0$ pour $k \geq 0$) Absurde.

Donc la famille $B_{u,x}$ est liée et $F = \text{Vect}(B_{u,x})$ est un sev de E de dim q .
 Comme u est nilpotent d'ordre q , on s'attend que F est stable par u .

2) Dans E^* , $H^\perp = \{y \in E, \forall \varphi \in H, \varphi(y) = 0\} \subset E$.
 et on a $\dim(H^\perp) = \dim(E) - \dim(H)$.

Si H est stable par ${}^t u$, alors $H^\perp$ est stable par u .

En effet : $\forall y \in H^\perp$ et $\varphi \in H$, on a $\varphi(u(y)) = {}^t u(\varphi)(y) = 0$

et $u(y) \in H^\perp$.

Comme ${}^t u$ est nilpotent d'ordre q , $\exists \varphi \in E^*$ tq $({}^t u)^{q-1}(\varphi) \neq 0$

On a donc $\varphi \circ u^{q-1} \neq 0$ et on dispose de $x \in E$ tq $\varphi(u^{q-1}(x)) \neq 0$.

On a donc $u^{q-1}(x) \neq 0$.

D'après le lemme précédent, F et H sont de dim q , F étant stable par u
 H stable par ${}^t u$ et $H^\perp$ stable par u .

Comme $\dim(F) + \dim(H^\perp) = \dim(H) + \dim(H^\perp)$
 $= n$
 $= \dim(E)$.

Il suffit de vérifier que $F \cap H^\perp = \{0\}$ pour avoir $E = F \oplus H^\perp$.

Soit $y = \sum_{i=0}^{q-1} \lambda_i u^i(x) \in F \cap H^\perp$

On a $u^{q-1}(y) \in H^\perp$ (stable par u).

donc $0 = \varphi(u^{q-1}(y)) = \lambda_0 \varphi(u^{q-1}(x))$ et $\lambda_0 = 0$

En supposant $\lambda_0 = \dots = \lambda_j = 0$ pour $0 \leq j \leq q-2$, on a $y = \sum_{i=j+1}^{q-1} \lambda_i u^i(x)$ et

$0 = \varphi(u^{q-j-2}(y)) = \lambda_{j+1} \varphi(u^{q-1}(x))$ donc $\lambda_{j+1} = 0$.

Soigner
la
réécriture.

3) On continue par récurrence sur $\dim(E) = n$.

• Pour $n=1$, $u=0$ et c'est trivial.

• Soit $n \geq 1$, et supposons les acquis pour les E de dim $< n$

Par le lemme 2 et avec les mêmes notations, la matrice de $u|_F$ (F stable par u) dans la base $B_1 = (x, u(x), \dots, u^{q-1}(x))$ est :

$$J_q = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(q, \mathbb{K})$$

Si $q=n$, c'est fini, sinon en complétant cette base par une base $B_{H^\perp}$ de $H^\perp$,

la matrice de u dans la base $B = B_1 \cup B_{H^\perp}$ est $A = \begin{pmatrix} J_q & 0 \\ 0 & A_{n-q} \end{pmatrix}$

($H^\perp$ est stable par u) où $A_{n-q} \in \text{Mat}(n-q, \mathbb{K})$

est la matrice de $u|_{H^\perp}$ dans $B_{H^\perp}$, cette matrice étant nilpotente d'ordre au plus égal à q avec G de dim $< n$.

Par le principe de récurrence on obtient le théorème.