Corps des nombres algébriques. Ref : Perrin et Ucamlon 125 144 148 127

Théorème : Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ une extension et posons $\mathbb{M} = \{x \in \mathbb{L}$ tq x est algébrique sur $\mathbb{K}\}$
alors $\mathbb{M}$ est un sous corps de $\mathbb{L}$.
De plus $\mathbb{M}$ est algébriquement clos lorsque $\mathbb{L}$ l'est.

Lemme 1 : (base télescopique + multiplicativité des degrés).
Soient $\mathbb{K} \subset \mathbb{L} \subset \mathbb{M}$ des corps, $(e_i)_{i\in I}$ une base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$, $(f_j)_{j\in J}$ une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{L}$.
Alors la famille $(e_i f_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{K}$.
En particulier, si les degrés sont finis : $[\mathbb{M}:\mathbb{K}] = [\mathbb{M}:\mathbb{L}]\times[\mathbb{L}:\mathbb{K}]$.

Lemme 2 : Soit $\mathbb{K} \subset \mathbb{L}$ une extension et soit $\alpha \in \mathbb{L}$. LASSE :
i) α est algébrique sur $\mathbb{K}$.
ii) $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$
iii) $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}[\alpha] < +\infty$.

plan : 1) Lemme 1
2) Lemme 2
3) $\mathbb{M}$ sous corps de $\mathbb{L}$
4) algébriquement clos.

---

1) a) La famille $e_i f_j$ est libre sur $\mathbb{K}$: $\sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i f_j = 0$ avec $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$.
on a $\sum_j f_j \left(\sum_i \lambda_{ij} e_i\right) = 0$
donc puisque $(f_j)_{j\in J}$ est une base de $\mathbb{M}$ sur $\mathbb{L}$, $\forall j \in J$, $\sum_i \lambda_{ij} e_i = 0$
comme (e_i) base de $\mathbb{L}$ sur $\mathbb{K}$, $\lambda_{ij} = 0 \ \forall (i,j) \in I\times J$.
b) Soit $x \in \mathbb{M}$. $x = \sum_j \mu_j f_j$ avec $\mu_j \in \mathbb{L}$
On décompose $\mu_j = \sum_i \lambda_{ij} e_i$
Finalement $x = \sum_{i,j} \lambda_{ij} e_i f_j$ avec $\lambda_{ij} \in \mathbb{K}$ et la famille engendre $\mathbb{M}$.

2) $\boxed{i) \Rightarrow ii)}$ Supposons α algébrique de polynôme minimal P.
On a alors l'isomorphisme $\bar{\varphi} = \mathbb{K}[T]/(P) \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}[\alpha]$.
Comme $\mathbb{K}[\alpha] \subset \mathbb{L}$, il est intègre
Donc (P) est premier et donc P est irréductible dans l'anneau principal $\mathbb{K}[T]$
Donc (P) est maximal
Donc $\mathbb{K}[\alpha]$ est un corps, i.e. $\mathbb{K}[\alpha] = \mathbb{K}(\alpha)$.
$\boxed{ii) \Rightarrow i)}$ ~~[illegible]~~. Si α est transcendant $\mathbb{K}[\alpha] \simeq \mathbb{K}[T]$ et $\mathbb{K}(\alpha) \simeq \mathbb{K}(T)$
$\boxed{iii) \Rightarrow i)}$ Par dessus car $\mathbb{K}[T]$ est de dim infinie sur $\mathbb{K}$.
$\boxed{i) \Rightarrow iii)}$ On note $n = \deg(P)$.
L'isomorphisme $\mathbb{K}[T]/(P) \longrightarrow \mathbb{K}[\alpha]$, on a alors, (par D.E).
$(1, \alpha, \dots, \alpha^{n-1})$ est une base $\mathbb{K}[\alpha]$ sur $\mathbb{K}$.

3) Soit $\alpha, \alpha' \in \mathbb{M}$.

Considérons le sous anneau $\mathbb{K}[\alpha,\alpha']$ engendré par α et α'.

On a alors $\mathbb{K}[\alpha,\alpha'] = \mathbb{K}[\alpha][\alpha']$

Donc α' étant algébrique sur $\mathbb{K}$, elle l'est aussi sur $\mathbb{K}[\alpha]$.

D'après le lemme 2, $\mathbb{K}[\alpha]$ et $\mathbb{K}[\alpha,\alpha']$ sont des corps

De plus, le lemme 2 affirme que $[\mathbb{K}[\alpha] : \mathbb{K}]$ et $[\mathbb{K}[\alpha,\alpha'] : \mathbb{K}[\alpha]]$ sont $< +\infty$

et lemme 1 donne alors $[\mathbb{K}[\alpha,\alpha'] : \mathbb{K}] < +\infty$.

Mais alors, $\mathbb{K}[\alpha+\alpha']$ et $\mathbb{K}[\alpha\alpha']$ étant $\subset \mathbb{K}[\alpha,\alpha']$,

$\alpha+\alpha'$ et $\alpha\alpha'$ sont dans $\mathbb{M}$

4) Supposons $\mathbb{L}$ algébriquement clos.

Soit $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{M}[X]$, $P \neq 0$.

Comme $\mathbb{L}$ est algébriquement clos, $\exists \alpha \in \mathbb{L}$ tq $P(\alpha) = 0$.

Donc d'après 2) appliqué à $\mathbb{K}(a_0, \dots, a_n)$,

$\mathbb{K}(a_0, \dots, a_n)[\alpha]$ est un corps $= \mathbb{K}(a_0, \dots, a_n, \alpha)$

de dim $< +\infty$ comme $\mathbb{K}(a_0, \dots, a_n)$-ev.

Or $[\mathbb{K}(a_0, \dots, a_n) : \mathbb{K}] < +\infty$ d'après 2) + récurrence.

Donc $[\mathbb{K}(a_0, \dots, a_n, \alpha) : \mathbb{K}] < +\infty$ d'après 1) ~~+ récurrence~~

donc $\alpha \in \mathbb{M}$. car $\mathbb{K}(\alpha) \subset \mathbb{K}(a_0, \dots, a_n, \alpha)$.