

Décomposition polaire :

th 2 application $p: O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme
 $(O, S) \mapsto OS$

plan: 1) (comme) $O_n(\mathbb{R})$ est compact.

2) p est définie et continue.

3) p est surjective

4) p est injective

5) p^{-1} est continue.

1) soit $f: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, f est C^∞ car polynôme en les coefficients de M .
 $M \mapsto MM$

et $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$ donc $O_n(\mathbb{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbb{R})$ car l'image réciproque d'un fermé.
 $O_n(\mathbb{R})$ est bornée car tous ses éléments sont de norme 1 pour $||\cdot||_2$.
 Comme $M_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, c'est un compact.

2) Si $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $OS \in GL_n(\mathbb{R})$ et
 est C^∞ car polynôme en les coeffs de O et S .

3) Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$, ${}^tMM \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. on a ${}^tMxMx = ||Mx||_2^2 > 0 \forall x \neq 0$.

D'après le théorème spectral, on dispose de $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i > 0$
 tels que ${}^tMM = PDP$

On pose alors $S = {}^tP \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P \in S_n^{++}(\mathbb{R})$

On cherche O tq $M = OS$, posons $O = MS^{-1}$

$$\begin{aligned} \text{On a alors } {}^tOO &= {}^t(S^{-1})MS^{-1} \\ &= (S^{-1}){}^tMM S^{-1} \\ &= S^{-1}({}^tMM)S^{-1} \\ &= S^{-1}S^2S^{-1} \\ &= I_n. \end{aligned}$$

donc $O \in O_n(\mathbb{R})$.

4) Soient (O, S) ~~(O', S')~~ $(O', S') \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $OS = O'S' = M \in GL_n(\mathbb{R})$
 alors $S^2 = {}^tMM$

$$\begin{aligned} &= {}^t(O'S')O'S' \\ &= S'{}^tOO'S' \\ &= S'^2 \end{aligned}$$

Puisque S et S' commutent, soit Q un polynôme interpolant envoyant $\lambda_i \rightarrow \sqrt{\lambda_i}$

$$\begin{aligned} \text{Rens } S &= P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= P Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= Q P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} \\ &= Q(S^2) \\ &= Q(S'^2) \end{aligned}$$

Donc S est un polynôme en S'^2

Donc S est un polynôme en S'

Donc S commute avec S'

Comme S et $S' \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, elles sont diagonalisables,
elles sont alors co-diagonalisables:

On dispose de $P_0 \in O_n(\mathbb{R})$ tq $S = P_0 \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix} P_0^{-1}$ et $S' = P_0 \begin{pmatrix} \mu_1' & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n' \end{pmatrix} P_0^{-1}$.

Comme $S^2 = S'^2$, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $0 < \mu_i^2 = \mu_i'^2$

On a donc $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\mu_i = \mu_i'$

Donc $S = S'$.

Donc $O = O'$ ($S \in GL_n(\mathbb{R})$).

5) Montrons la continuité de μ^{-1} de façon séquentielle.

Soit (P_p) une suite de matrices ^{de $GL_n(\mathbb{R})$} qui converge vers $P \in GL_n(\mathbb{R})$

Pour $p \in \mathbb{N}$ on dispose de O_p et $S_p \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $P_p = O_p S_p$.

Par compacité de $O_n(\mathbb{R})$, et le théorème de Bolzano-Weierstrass, on dispose
de $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et $O_\varphi \in O_n(\mathbb{R})$ tq $O_{\varphi(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} O_\varphi$.

Donc $S_{\varphi(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \bar{S} = O_\varphi^{-1} P \in (GL_n(\mathbb{R}) \cap \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})}) = GL_n(\mathbb{R}) \cap S_n^{++}(\mathbb{R})$
 $= S_n^{++}(\mathbb{R})$

donc $\bar{S}$ est symétrique def > 0 donc $\bar{S} = S$

par unicité de la décomposition, $O = O_\varphi$.

Donc O est la seule valeur d'adhérence de (O_p) (si on en avait pu le prendre avec B.-W.)

Donc $S_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} S$

Donc $(O_k, S_k) \rightarrow (O, S)$

Donc μ^{-1} est continue.

Remarque: $P_q \overline{S_n^{++}(\mathbb{R})} = S_n^{++}(\mathbb{R})$.

a) $S_n^{++}(\mathbb{R})$ est fermé donc $\boxed{S_n^{++}(\mathbb{R})}$

b) Th. Spectral pour montrer la limite.