

Caractérisation de la fonction Gamma par la convergence.

Ref. Rudin (235) 239

Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$. On note $\Gamma: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

bien définie.

$f = \Gamma$ si f vérifie :

- $f(x+1) = x f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*$
- $f(1) = 1$
- $\ln f$ est convexe sur $]0, +\infty[$

preuve : 1) on a Γ est bien définie,

2) $\Rightarrow$ a)
 (b)
 c)

3) $\Leftarrow$

preuve : 1) On pose pour $x > 0$, $g_x: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$
 $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ qui est continue.

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$
 étude sur $]0, 1]$, $e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

$$t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}} \quad \text{et } 1-x < 1$$

donc par le critère de Weierstrass, g_x est intégrable sur $]0, 1]$.

étude de $[1, +\infty[$, $t^2 x t^{x-1} e^{-t} = t^{x+1} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$

$$\text{donc } t^{x-1} e^{-t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

donc g_x est intégrable sur $[1, +\infty[$

$$\begin{aligned} 2) \Rightarrow a) \text{ Soit } x > 0. \quad \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt \\ &= \lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty}} \int_n^n t^x e^{-t} dt \\ \text{IPP} &= \lim_{\substack{n \rightarrow 0 \\ n \rightarrow +\infty}} \left[-e^{-t} t^x \right]_n^n - \int_n^n x t^{x-1} (-e^{-t}) dt \\ &= x \Gamma(x) \end{aligned}$$

b). a) avec valeurs ①

c) Soient $p > 1$ et $q > 1$ tel $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$.

$$\Gamma(x)^{\frac{1}{p}} \Gamma(y)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^{+\infty} \underbrace{t^{x-1} e^{-t}}_{f_x(t)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{+\infty} \underbrace{t^{y-1} e^{-t}}_{f_y(t)} dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \|f_x^{\frac{1}{p}}\|_p \|f_y^{\frac{1}{q}}\|_q$$

$$\geq \|f_x^{\frac{1}{p}} f_y^{\frac{1}{q}}\|_1 \quad \text{d'après l'inégalité de Hölder}$$

$$\geq \int_0^{+\infty} t^{\frac{x}{p} - \frac{1}{p}} e^{-\frac{t}{p}} t^{\frac{y}{q} - \frac{1}{q}} e^{-\frac{t}{q}} dt$$

$$\geq \int_0^{+\infty} t^{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} - 1} e^{-t} dt$$

$$\geq \Gamma\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right).$$

Donc $\ln(\Gamma(\frac{x}{p} + \frac{y}{q})) \leq \ln(\Gamma(x)^{\frac{1}{p}} \Gamma(y)^{\frac{1}{q}})$ car $\ln$ est croissante

$\leq \frac{1}{p} \ln(\Gamma(x)) + \frac{1}{q} \ln(\Gamma(y))$ donc $\ln \Gamma$ est convexe.

3) $\boxed{\Leftarrow}$ Il suffit de prouver qu'il n'existe qu'une fonction vérifiant a), b) et c) $\forall x > 0$.

Par a), il suffit même de l'établir pour $x \in]0, 1[$.

Soit f vérifiant a), b) et c).

On pose $\varphi = \ln f$.

$$\forall n > 0, \quad \varphi(x+1) = \varphi(x) + \ln(x).$$

$\varphi(1) = 0$ d'après b) et φ est connue d'après c).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0, 1[$.

$$\varphi(n+1) = \varphi(n) + \ln(n) = \cancel{\varphi(n)} + \sum_{k=1}^n \ln(k) = \ln(n!).$$

(réécriture)

Comme φ est convexe, l'inégalité des pentes assure que :

$$\frac{\varphi(n+1) - \varphi(n)}{1} \leq \frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x} \leq \frac{\varphi(n+2) - \varphi(n+1)}{1}$$

$$\text{Donc } \ln(n) \leq \frac{\varphi(n+1+x) - \varphi(n+1)}{x} \leq \ln(n+1).$$

Par ailleurs, $\varphi(n+1+x) = \varphi(x) + \ln(x(x+1) \dots (x+n))$. (P_n).

Par récurrence : $P_1 \Leftrightarrow a)$.

• Soit $n \geq 1$ et supposons P_n .

$$\begin{aligned} \varphi(n+2+x) &= \varphi(n+1+x+1) \\ &= \cancel{\varphi(n+1+x)} + \ln(n+1+x) = \varphi(n+1+x) + \ln(n+1+x) \quad (\text{d'après a)}) \\ &= \varphi(x) + \ln(x(x+1) \dots (x+n)) + \ln(n+1+x) \\ &= \varphi(x) + \ln(x(x+1) \dots (x+n)(x+n+1)) \end{aligned}$$

Donc P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Ainsi } x \ln(n) \leq \varphi(x) + \ln(x(x+1) \dots (x+n)) \stackrel{-\varphi(n+1)}{\leq} x \ln(n+1).$$

$$\text{Donc } \ln(n^x) \leq \varphi(x) + \ln(x(x+1) \dots (x+n)) \stackrel{-\varphi(n+1)}{\leq} x \ln(n+1).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } 0 &\leq \frac{\varphi(x) - \ln(n^x) + \ln(x(x+1) \dots (x+n))}{x} \stackrel{-\ln(n!)}{\leq} \frac{x \ln(n+1) - \ln(n^x)}{x} \\ &= \frac{\varphi(x) - \ln\left(\frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}\right)}{x} \quad \begin{aligned} &= x \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}\right) \text{ indépendant de } f.$$

Donc il existe une unique fonction vérifiant a), b) et c).

$$\text{Bonne : } \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1) \dots (x+n)}.$$