

théorème du point fixe de Banach-Picard et théorème de Cauchy (séries?)

Ré: PGCD

206

204

205

th de B.-P.: Soit (E, d) un espace métrique complet.

Soit $f: E \rightarrow E$ une application k -contractante, $0 < k < 1$, alors

1) f admet un unique point fixe $x^* \in E$

2) $\forall x_0 \in E$, la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$
vérifie $d(x_n, x^*) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_1, x_0) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

preuve: existence: Soit $x_0 \in E$.

On pose $x_{n+1} = f(x_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Montrons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad d(x_{n+1}, x_n) = d(f(x_n), f(x_{n-1}))$$

$$\leq k d(x_n, x_{n-1}) \quad \text{par } k\text{-contractance}$$

$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}, \quad d(x_{n-1}, x_n) \leq k^n d(x_1, x_0).$$

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$.

$$d(x_q, x_p) \stackrel{\text{I.T.}}{\leq} \sum_{n=p}^{q-1} d(x_{n+1}, x_n)$$

$$\leq \sum_{n=p}^{+\infty} k^n d(x_1, x_0)$$

$$\leq k^p \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0).$$

$$\xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0.$$

donc (x_n) est de Cauchy dans (E, d) complet

donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un $x^* \in E$.

~~unicité~~: par continuité de f (car k -contractante), $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x^*)$

donc $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x^*$

par unicité de la limite $x^* = f(x^*)$.

unicité: Soient x^* et y^* deux points fixes de f .

$$d(x^*, y^*) = d(f(x^*), f(y^*))$$

$$\leq k d(x^*, y^*) \quad \text{par } k\text{-contractance}$$

$$\text{donc } \underbrace{d(x^*, y^*)}_{\geq 0} \underbrace{/(1-k)}_{> 0} \leq 0$$

$$\text{donc } d(x^*, y^*) = 0$$

$$\text{donc } x^* = y^*.$$

Théorème de Cauchy (Linéaire) :

Soient $J \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle, E un espace de Banach.

$A: J \rightarrow \mathcal{L}(E)$ $\mathcal{C}^0$, $b: J \rightarrow E$ $\mathcal{C}^0$, $t_0 \in J$, $x_0 \in E$.

Alors il existe une unique $x \in \mathcal{C}^1(J, E)$ tq :
$$\begin{cases} \forall t \in J, x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

preuve: On considère : $(\mathcal{E}) \begin{cases} x'(t) + A(t)x(t) = b(t) & \forall t \in J \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$

Soient $a < b$ tels que $t_0 \in [a, b] \subset J$.

$X := \mathcal{C}^0([a, b], E)$ et on considère la norme $\|x\|_X := \max_{t \in [a, b]} \|x(t)\|_E$.

$(X, \|\cdot\|_X)$ Banach

$\Phi: X \rightarrow X$

$x \mapsto \left(\begin{aligned} &\Phi(x): [a, b] \rightarrow E \\ &t \mapsto x_0 + \int_{t_0}^t (A(s)x(s) + b(s)) ds. \end{aligned} \right)$

Où Φ est contractante en changeant de norme.

Pour $\lambda > 0$, on pose $\|x\|_{X, \lambda} := \max_{t \in [a, b]} e^{-\lambda|t-t_0|} \|x(t)\|_E$

$\|\cdot\|_{X, \lambda}$ est équivalente à $\|\cdot\|_X$ donc $(X, \|\cdot\|_{X, \lambda})$ espace de Banach.

Soient $x, y \in X$, $\forall t \in [a, b]$.

$$\Phi(y)(t) - \Phi(x)(t) = \int_{t_0}^t (A(s)(y(s) - x(s))) ds.$$

$$\text{Donc } \|\Phi(y) - \Phi(x)\|_{X, \lambda} \leq \max_{t \in [a, b]} e^{-\lambda|t-t_0|} \left| \int_{t_0}^t \|A(s)(y(s) - x(s))\|_E ds \right|$$

$$\leq \sum_{\substack{A \in \mathcal{L}(E, E) \\ \text{compact}}} M_A \max_{t \in [a, b]} e^{-\lambda|t-t_0|} \left| \int_{t_0}^t \|y(s) - x(s)\|_E ds \right|$$

$$\leq M_A \|y - x\|_{X, \lambda} \max_{t \in [a, b]} e^{-\lambda|t-t_0|} \underbrace{\left| \int_{t_0}^t e^{\lambda|s-t_0|} ds \right|}_{\frac{e^{\lambda|t-t_0|} - 1}{\lambda}}$$

$$\leq \frac{M_A}{\lambda} \|y - x\|_{X, \lambda}.$$

Pour $\lambda > M_A$, Φ est contractante et admet un unique point fixe avec

$[a, b]$ suite croissante d'intervalles dont le $\cup$ vaut J ,

on conclut par le th de Banach-Picard.

avec le fait que $(x \text{ sol de } (\mathcal{E}) \text{ sur } [a, b]) \Leftrightarrow (\Phi(x) = x)$,
elle a été choisie par.