

Équivalence des normes en dimension finie + Théorème de Riesz.

Ref: Gaudin
207
206
208

Théorème: Dans un evn de dim finie, toutes les normes sont équivalentes.

Théorème de Riesz: Soit E un evn. $B = \{x \in E, \|x\|_E = 1\}$ est compact, car E ssi E et de dim finie.

1) Soit E un K -ev de dimension finie

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

$\forall x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \|x\|_\infty^E := \max |x_i|$ définit une norme sur E .

Soit N une norme sur E .

On pose $\alpha := \sum_{i=1}^n N(e_i)$, on a alors

$$\begin{aligned} \forall x \in E, N(x) &\leq \sum_{i=1}^n N(x_i e_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |x_i| N(e_i) \\ &\leq \alpha \|x\|_\infty^E \end{aligned}$$

Munissons K^n de la norme produit $\|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty^K$.

L'application $\varphi: (K^n, \|\cdot\|_\infty^K) \rightarrow (E, \|\cdot\|_\infty^E)$ est une isométrie
 $(x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i e_i$

Donc $S = \{x \in E, \|x\|_\infty^E = 1\}$ est un compact de (E, N) en tant qu'image

par φ continue du compact qu'est la sphère unité de K^n . Sphère unité de K^n est compact car produit de espaces ssi et de dim finie

D'après ce qui précède: $|N(x) - N(y)| \leq N(x - y) \leq \alpha \|x - y\|_\infty^E$

Donc $N: (E, \|\cdot\|_\infty^E) \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne

Donc N est C^0 .

Comme S est un compact de $(E, \|\cdot\|_\infty^E)$ on en déduit que $b = \inf_{\|x\|_\infty^E = 1} N(x) \neq 0$.

Ainsi $\forall x \in E, x \neq 0, N(x) = \|x\|_\infty^E N(\frac{x}{\|x\|_\infty^E}) \geq b \|x\|_\infty^E$.

Finalement $\|x\|_\infty^E$ est équivalente à N .

2) $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons E de dimension finie.

Alors les compacts de E sont les fermés bornés de E .

En effet, soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ une suite bornée par $M > 0$ pour $\|\cdot\|_\infty^E$ (une base (e_i) étant fixée).

Alors les $(e_i^*(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornés dans $(K, |\cdot|)$

D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une suite $(e_i^*(x_{q(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge. ~~de même~~

De même, si $(e_i^*(x_{q(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge ($\forall i$),

^{L'appli} elle est bornée pour $(e_i^*(x_{q(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$

d'où on réextrait (sélection diagonale)

Par réénumération $\forall i \in \mathbb{N}, (e_i^*(x_{q(q(n))}))_{n \in \mathbb{N}}$ converge

Donc tout fermé borné de E vérifie la propriété de Bolzano-Weierstrass, donc il est compact.

$\Rightarrow$ Réciproquement, supposons que E est de dimension infinie. (contre-exemple).

Raisonnons par l'absurde,

Supposons que $B_E(0,1)$ est compact.

On dispose de $x = (x_1, \dots, x_r) \in E^r$ tel que

$$\overline{B_E(0,1)} \subseteq \bigcup_{i=1}^r B_E(x_i, 1) \quad (\text{propriété de Borel-Lébesgue})$$

Poseons $F = \text{Vect}(x_1, \dots, x_r)$.

Comme E est de dimension infinie, $E \neq F$.

Soit $x \in E \setminus F$.

Comme F est à dim finie, on dispose de $y \in F$ tq $\|x - y\| = d(x, F) > 0$.

(On projette, quelle que place dans $\text{Vect}(F, x)$)

En effet $y \mapsto \|y\|$ est C^0 et coercive sur F à dim finie, donc les fermés bornés sont compacts.

Poseons $x_0 = \frac{x-y}{\|x-y\|}$.

$$\begin{aligned} 0 &< d(x_0, F) = \inf_{z \in F} \|x_0 - z\| \\ &\leq \|x_0 - 0\| \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall z \in F, \|x_0 - z\| &= \frac{1}{\|x-y\|} \|x - (y + \|x-y\|z)\| \\ &\geq \frac{d(x, F)}{\|x-y\|} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

Finalement $d(x_0, F) = 1$.

Or $x_0 \in \overline{B_E(0,1)}$, donc $\exists \epsilon \in]0,1[$ tq $x_0 \in B_E(x_0, \epsilon)$.

$$\begin{aligned} \text{donc } 1 &> \|x_0 - \underbrace{z_0}_{\in F}\| \\ &> d(x_0, F) \\ &> 1 \end{aligned} \quad \text{ABSURDE.}$$