

théorème: Soient J un segment de $\mathbb{R}$ et $f: J \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.

f est limite uniforme sur J d'une suite de fonctions polynomiales.

201

203

209

214

241

232?

On note $E = \mathcal{C}_c(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$\star: E \times E \rightarrow E$

$$(f, g) \mapsto f \star g: x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-t)g(t) dt$$

plan: 1) ~~on a $\star$ est commutative et distributive par rapport à $+$.~~

~~2) $\forall$ suite (x_n) de fonctions positives de E vérifiant:~~

$$\forall n \in \mathbb{N}, \int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) dt = 1 \text{ et } \forall \epsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{|t| > 2} x_n(t) dt = 0.$$

$$\text{et } \forall f \in E, (f \star x_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\text{unif}} f \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$2) \forall n \in \mathbb{N}, \text{ on pose } \phi_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$$

$$\text{et } \phi_n(t) \rightarrow \begin{cases} \frac{(1-t^2)^n}{\phi_n} & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) ϕ_n (ϕ_n) est une approximation de l'unité

b) soit $f \in E$ nulle en dehors de $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $f \star \phi_n$ est une fonction polynôme.

c) Conclure.

1) Soit $\epsilon > 0$.

f est continue et nulle en dehors d'un compact,

d'après Heine, elle est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

donc on dispose de $\eta > 0$ tq $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ tq $|x-y| < \eta$, $|f(x) - f(y)| \leq \epsilon$.

Soit M un majorant de $|f|$ sur $\mathbb{R}$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ tq $\int_{|t| > \eta} x_n(t) dt \leq \epsilon \quad \forall n \geq N$.

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) dt = 1$ et que $x_n \geq 0$,

$$\forall n \geq N, \forall x \in \mathbb{R}, |f \star x_n(x) - f(x)| = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} [f(x-t) - f(x)] x_n(t) dt \right|$$

$\leq$

$$\leq \int_{|t| > \eta} |f(x-t) - f(x)| x_n(t) dt + \int_{-\eta}^{\eta} |f(x-t) - f(x)| x_n(t) dt.$$

$$\leq 2M\epsilon + \epsilon \int_{-\eta}^{\eta} x_n(t) dt.$$

$$\leq 2M\epsilon + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} x_n(t) dt$$

$$\leq (2M+1)\epsilon.$$

Donc $f \star x_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ sur $\mathbb{R}$.

$$2) a) \int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t) dt = \int_{-1}^1 p_n(t) dt \\ = \frac{\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt}{\int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt} = 1.$$

$$\text{De plus, } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 2 \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ \geq 2 \int_0^1 t(1-t^2)^n dt \\ \geq \left[-\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \\ \geq \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Soit } x \in]0, \pi[, \forall n \in \mathbb{N}^*, \int_{|t| \geq x} p_n(t) dt = \frac{2}{a_n} \int_x^1 (1-t^2)^n dt \\ \leq \frac{2}{a_n} (1-x^2)^n \\ \leq 2(n+1) (1-x^2)^n.$$

et comme $|1-x^2| < 1$, $\int_{|t| \geq x} p_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$b) \forall x \in \mathbb{R}, (f * p_n)(x) = (p_n * f)(x) \\ = \int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} p_n(x-t) f(t) dt.$$

$$\text{Si } x \text{ et } t \in \mathbb{R}, |x-t| \leq 1, \text{ alors } p_n(x-t) = \frac{(1-(x-t)^2)^n}{a_n} \\ = \sum_{k=0}^n q_k(t) x^k \text{ ou } q_k \text{ est } \text{set polynomiale.}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R}, (f * p_n)(x) = \sum_{k=0}^n \left(\int_{-\frac{x}{2}}^{\frac{x}{2}} q_k(t) f(t) dt \right) x^k \text{ qui est } \text{set polynomiale.}$$

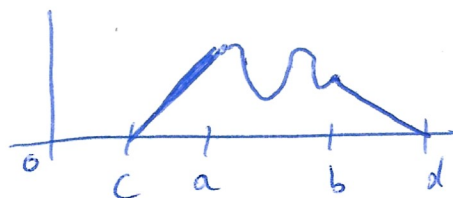
D'après 1), $f * p_n \xrightarrow{\text{unif}} f$ sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}$.

f est donc limite uniforme sur $\mathbb{R}$ de fonctions polynomiales.

c). Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue.

Soit $[c, d] \not\supset [a, b]$.

On prolonge f sur $[c, a]$ (resp sur $[b, d]$) par une fonction affine prenant la valeur 0 en c et $f(a)$ en a . (resp 0 en d et $f(b)$ en b).



puis on prolonge f sur $\mathbb{R}$ qui vaut 0 hors de $[c, d]$.
prolongement C^0 , nul en dehors d'un compact,
donc $f \in \mathcal{E}$.

Par changement de variable affine qui envoie $[c, d]$ sur $[-1, 1]$

on se ramène au cas précédent,

f est alors limite uniforme de set polynomiales sur $[c, d]$

donc sur $[a, b]$.