

Théorème 1: Soit C un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H .

Alors $\exists ! p \in C, \|x - p\| = d(x, C)$.

205
213
219
253.

De plus, p est l'unique élément de C satisfaisant:
 $\forall c \in C, \operatorname{Re}(\langle x - p, c - p \rangle) \leq 0$.

Corollaire: Soit F un sous fermé de H , $H = F \oplus F^\perp$.

Théorème 2: Soit H un Hilbert. Alors $\forall \phi \in H', \exists ! f \in H$ tq $\forall x \in H, \phi(x) = \langle f, x \rangle$
De plus $\phi \mapsto f$ est une isométrie: $\|f\|_H = \|\phi\|_{H'}$.

Plan: 1) a) existence
b) unicité
c) de plus, ...
2) a) existence
b) unicité
c) isométrie

1) Soient $x \in H$ et notons $d = d(x, C)$.

a) Considérons une suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de C telle que $d_n = \|x - c_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} d$.

Elle est de Cauchy. Pour $p, q \in \mathbb{N}$, on a:

$$\begin{aligned} \|c_p - c_q\|^2 &= \| (c_p - x) - (c_q - x) \|^2 \\ &= 2(d_p^2 + d_q^2) - \| (c_p - x) + (c_q - x) \|^2 \text{ par l'identité du parallélogramme} \\ &= 2(d_p^2 + d_q^2) - 4 \left\| \frac{c_p + c_q}{2} - x \right\|^2 \\ &\leq 2(d_p^2 + d_q^2) - 4d^2 \quad \text{car } \frac{c_p + c_q}{2} \in C \text{ par convexité.} \\ &\xrightarrow{p, q \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Donc $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy.

Comme C est complet, elle converge dans C vers un point p et $\|x - p\| = d$.

b) Soient $c_1, c_2 \in C$ satisfaisants.

Prenons alors $c = \frac{c_1 + c_2}{2} \in C$.

$d_{2n} = c_1$ et $d_{2n+1} = c_2$.

$$\begin{aligned} d^2 &\leq \|x - c\|^2 \\ &\leq 2 \left(\left\| \frac{c_1 - c_2}{2} \right\|^2 + \left\| x - \frac{c_1 + c_2}{2} \right\|^2 \right) = \left\| \frac{c_1 - c_2}{2} \right\|^2 \\ &\leq d^2 - \left\| \frac{c_1 - c_2}{2} \right\|^2 \end{aligned}$$

Donc d'après ce qu'on a montré en 1)

(c_n) converge

Donc $c_1 = c_2$.

$$\text{Donc } \left\| \frac{c_1 - c_2}{2} \right\|^2 = 0$$

Donc $c_1 = c_2$.

c) Soit $x \in C$. $\forall a \in C, t \in]0, 1[, (1-t)x + tc \in C$ donc

$$\|x - ((1-t)x + tc)\|^2 \geq \|x - a\|^2$$

$$\|x - (1-t)x - tc\| = \|tx - tc\| = t\|x - c\|$$

$$= (x - tx - (1-t)x, x - tx - (1-t)x) = (x - tx - x + tx, x - tx - x + tx) = 0$$

$$\text{on } \|x - x - t(c - x)\|^2 \geq \|x - a\|^2$$

$$\text{on } \|x - a\|^2 - 2t \operatorname{Re}(\langle x - a, c - a \rangle) + t^2 \|c - a\|^2 \geq \|x - a\|^2 \quad \text{fin } \leq 0$$

$$\text{on } -2t \operatorname{Re}(\langle x - a, c - a \rangle) + t^2 \|c - a\|^2 \geq 0$$

$$\text{fin } -2 \operatorname{Re}(\langle x - a, c - a \rangle) + \|c - a\|^2 \geq 0$$

Si $x=p$, on a bien $\operatorname{Re}(\langle x-p, c-p \rangle) \leq 0$ en prenant $t=0$.

Réciproquement, si x satisfait $\operatorname{Re}(\langle x-p, c-p \rangle) \leq 0$, alors on peut montrer dans les expressions de prendre $c=p, t=1$
 pour obtenir $d = \|x-p\|$
 $\geq \|x-p\|$ donc $x=p$.

2) D'après 1), $\forall x \in H, \forall c \in F, \langle x-p, c \rangle = 0$

on $\forall t \in \mathbb{K}, \operatorname{Re}(\langle x-p, t(c-p) \rangle) \leq 0$
 donc on prendant $t \in \mathbb{R}$ puis $t \in i\mathbb{R}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,
 $\langle x-p, c \rangle = 0$.

donc $x = p + (x-p) \in F + F^\perp$.

On a bien $H = F \oplus F^\perp$.

laisse
 tomber ?

3) a) Soit $\phi \in H'$. Si $\phi=0$, $v=0$ convient.

sinon, $E := \ker \phi = \phi^{-1}(\{0\})$ qui est un hyperplan vectoriel de H
 puisque $\phi|_{(E^\perp)^\perp}$ est linéaire, injective et non nulle.

Pour $v \in E^\perp$ de ϕ , E est fermé.

Considérons alors $b \in E^\perp$ tel que $\phi(b) = 1$

Pour $x = (b \in E^\perp)$, on a alors

$$\phi(x) = \lambda = \langle x, v \rangle \text{ en posant } v = \frac{b}{\|b\|^2}$$

et pour $x \in \ker(\phi)$, $\phi(x) = 0 = \langle x, v \rangle$.

Comme $H = E \oplus E^\perp$ d'après 1), on a bien finalement $\phi = \langle \cdot, v \rangle$

b) $x \mapsto \langle x, v \rangle$ est linéaire et ne s'annule nul donc il y a unicité, (arg, arg)

c) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il y a égalité des normes.