Théorème de Riesz-Fischer (Complétude de L^p). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Réf: Rudin 205 208 201 234.

$\forall p \in [1, +\infty]$, L^p est complet, i.e. $(L^p, \|\cdot\|_p)$ est un Banach.

Plan: 1) cas $p = +\infty$

2) cas $p < +\infty$.

---

1) Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞.

Soit $A_{n,q} = \{x \in \Omega$ tel que $|f_q(x)| > \|f_q\|_\infty\}$

et $B_{n,m} = \{x \in \Omega$ tel que $|f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$.

Ces ensembles sont de mesure nulle par définition du sup-essentiel:

$\operatorname{supess} = \inf\{a \in \mathbb{R}$ tq $\mu(f^{-1}(]a, +\infty[)) = 0\}$.

$E := \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \bigcup_{n,m \in \mathbb{N}} A_q \cup B_{n,m}$ réunion dénombrable d'ensembles négligeables

donc $\mu(E) = 0$.

Soit $x \notin E$, $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$:

$\forall q \in \mathbb{N}^*$, $\exists N_q \in \mathbb{N}$, $\forall n, m \geq N_q$, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \frac{1}{q}$.

Comme $\mathbb{R}$ est complet, $(f_n(x))$ converge vers un réel $f(x)$.

Cela permet de définir une fonction f ~~bornée~~ mesurable sur E^c

On l'étend par 0 sur E.

Voilà notre candidat.

Donc $f \in L^\infty$ et (f_n) converge uniformément sur E^c vers f

~~Donc $f_n \to f$ dans L^∞~~:

$\forall x \in E^c$, $|f_n(x) - f_{N_q}(x)| \leq \frac{1}{q}$ donc $|f(x) - f_{N_q}(x)| \leq \frac{1}{q}$ conservation des $\leq$ par passage à la limite.

donc $\|f - f_{N_q}\|_\infty \leq \frac{1}{q}$

donc $|\|f\|_\infty - \|f_{N_q}\|_\infty| \leq \|f - f_{N_q}\|_\infty$.

Donc $\|f\|_\infty \leq \frac{1}{q} + \|f_{N_q}\|_\infty$.

et $\forall n \geq N_q$, $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{q}$ donc $\|f - f_n\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Donc L^∞ est complet.

2) Soit $p < +\infty$.

Soit (f_n) une suite de Cauchy de L^p.

De même, choisissons des représentants et on les identifie à f_n.

On peut construire une sous suite vérifiant: $\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \leq 2^{-i}$.

Posons alors, $g_q = \sum_{i=1}^{q} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$

et $g = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$

Ce sont des fonctions à valeurs dans $[0, +\infty]$.

Par inégalité triangulaire: $\|g_q\|_p \leq \sum_{i=1}^{q} 2^{-i} \leq 1$.

Par le théorème de convergence monotone, $\|g\|_p \leq 1$.

En particulier, ces fonctions sont finies presque partout

donc p.p. $x \in \Omega$.

La série $\sum f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)$ converge absolument.

Comme $\mathbb{R}$ est complet, cette série converge

par télescopage, $f_{n_i}(x) \xrightarrow[i\to+\infty]{} \Sigma = f$

Cela définit f presque partout on complète par 0.

Comme (f_n) est de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$, tq $\forall n, m \geq N$, $\int |f_n - f_m|^p < \varepsilon^p$

Pour $n = n_i$, le lemme de Fatou assure :

$$\int |f - f_m|^p \leq \liminf \int |f_{n_i} - f_m|^p < \varepsilon^p$$

En particulier, par inégalité triangulaire f est dans L^p.

et $f_n \to f$ dans L^p.