

Théorème: $\forall X, H \in E = M_n(\mathbb{R})$, $D_{\det(X)}(H) = \text{tr}({}^t \tilde{X} H)$
 où $\tilde{X}$ est la comatrice de X .

théorème de Liouville
Application: Soient $y_1, \dots, y_n$ des solutions (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$) du système différentiel
~~linéaire~~ linéaire $y' = A(t)y$, où $A(t) \in E$ est fct continue.

Alors $W'(t) = \text{tr}(A(t)) W(t)$, (En particulier) $\det(e^{tA}) = e^{t \text{tr}(A)}$.

Plan: 1) $\det$ est $\mathcal{C}^1$ sur E et $D_{\det(I)} = \text{tr}$

2) a) cas X inversible

b) étendre via densité dans E des matrices inversibles.

3) théorème de Liouville

4) $\det(e^{tA}) = e^{t \text{tr}(A)}$.

1) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E .

Comme $\det$ est polynomiale, elle est $\mathcal{C}^\infty$ donc $\mathcal{C}^1$ sur E .

$D_{\det(I)}$ se calcule via les dérivées de $\det$ en I dans une direction quelconque $H \in E$.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les vap de H , $1+t\lambda_i$ sont les vap de $I+tH$ car $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \det(I+tH) &= \prod_{i=1}^n (1+t\lambda_i) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + t \sum_{i=1}^n \lambda_i + o(t^2) \\ &\underset{t \rightarrow 0}{=} 1 + t \text{tr}(H) + o(t^2) \end{aligned}$$

En ordonnant selon les puissances croissantes de t , $D_{\det(I)}(H) = \text{tr}(H)$.

2) a) 1^{er} cas $X \in GL_n(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \det(X+H) &= \det(X(I+X^{-1}H)) \\ &= \det X \cdot \det(I+X^{-1}H) \\ &= \det X \cdot (1 + \text{tr}(X^{-1}H) + o(\|H\|)) \\ &= \det X + \text{tr}({}^t \tilde{X} H) + o(\|H\|) \end{aligned}$$

en notant $\tilde{X} = \det(X) {}^t X^{-1}$ la comatrice de X .

Donc $D_{\det(X)}(H) = \text{tr}({}^t \tilde{X} H)$.

b) 2^{ème} cas $X \notin GL_n(\mathbb{R})$

1) $GL_n(\mathbb{R})$ forme un ouvert dense de E .

$GL_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R}^*)$ donc c'est ouvert en tant qu'image réciproque d'ouvert par fct $\mathcal{C}^\infty$.

Soit $Y \in E$, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres. (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$).

On prend une suite (ε_k) qui converge vers 0 dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \det(Y - \varepsilon_k I) = \prod_{i=1}^n (\lambda_i - \varepsilon_k) \neq 0.$$

Les matrices $X_k = Y - \varepsilon_k I$ sont alors inversibles pour k assez grand

et $X_k \rightarrow Y$

Donc c'est bien dense.

Comme les ϕ_i sont des fonctions polynomiales, les coeffs de X .

$X \mapsto \tilde{X}$ est continue sur E .

Comme $\det$ est de classe C^1 , $\Rightarrow \ln \mathcal{D}$ est continue.

on peut prolonger l'expression sur $GL_n(\mathbb{R})$ par densité

3) Soit Y la matrice de colonnes $y_1, \dots, y_n$

En juxtaposant les égalités $y_i' = Ay_i$

on a $Y' = AY$.

Par dérivation de fonction composée,

$$\begin{aligned} w' &= (\det Y)' \\ &= \mathcal{D}(\det Y)(Y') \\ &= \ln({}^t \tilde{Y} Y'). \text{ d'après 2)} \\ &= \ln({}^t \tilde{Y} AY) \\ &= \ln(A Y {}^t \tilde{Y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{De plus } Y {}^t \tilde{Y} &= Y (\det(Y) {}^t(Y^{-1})) \\ &= \det(Y) I \\ &= ~~w~~ w I, \end{aligned}$$

$$\text{Donc } w'(t) = \ln(A(t)) w(t).$$

$$4) \text{ Donc } w(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t \ln(A(s)) ds\right) w(t_0)$$

Lorsque A est indépendante de t ,

$Y' = AY$ admet la solution $Y = e^{tA} Y_0$.

et il vient $\det(e^{tA}) = e^{t \ln(A)}$.