

Simplicité de $SO_3(\mathbb{R})$

Ed: FGN 2
163
108
204
158

- Plan: 1) G_0 la composante connexe de Id dans G sous groupe de $SO_3(\mathbb{R})$
 est un sous groupe de G
 2) Si $G \leq SO_3(\mathbb{R})$, alors $G_0 \leq SO_3(\mathbb{R})$
 3) Si G est connexe par arc, distingué et $\neq \{Id\}$, G contenant une rotation d'angle π
 4) Sous les mêmes hypothèses, déduire de $G = SO_3$.
 5) Conclure.

1) $Id \in G_0$ par def
 Soient $g, h \in G_0$, on a $gh^{-1} \in G_0$. Soient γ et γ' des chemins de G_0 reliant Id à g et h respectivement.
 Considérons $\gamma'' : t \mapsto \gamma(t)(\gamma'(t))^{-1}$.
 $\forall t \in [0, 1]$, $\gamma(t)$ et $\gamma'(t) \in G$ donc $\gamma(t)(\gamma'(t))^{-1} \in G$ car G sous groupe de $SO_3(\mathbb{R})$
 $\gamma \mapsto g^{-1}$ est continue sur SO_3 car via identification matricielle, $g^{-1} = P(g)$ où $P \in \mathbb{R}[X]$
 Enfin $\gamma''(0) = Id \cdot Id = Id$ et $\gamma''(1) = gh^{-1}$
 Donc γ'' est un chemin entre Id et gh^{-1} donc $gh^{-1} \in G_0$.

2) Soient $g \in G_0$, γ un chemin de G de Id à g et $h \in SO_3$.
 Considérons $\gamma' : [0, 1] \rightarrow SO_3$
 $t \mapsto h\gamma(t)h^{-1}$
 $\forall t \in [0, 1]$, $\gamma(t) \in G$, donc $h\gamma(t)h^{-1} \in G$ car $G \leq SO_3(\mathbb{R})$
 γ' est continue par φ_0 de γ et multiplication à gauche et à droite par h ou h^{-1} .
 Enfin $\gamma'(0) = h Id h^{-1} = Id$
 et $\gamma'(1) = hgh^{-1}$.
 γ' est un chemin de Id à hgh^{-1} donc $hgh^{-1} \in G_0$.
 donc $G_0 \trianglelefteq SO_3(\mathbb{R})$.

3) Si θ est l'angle d'une rotation g de $\mathbb{R}^3$, on dispose d'une BON dans laquelle
 sa matrice s'écrit $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
 Donc $\text{Tr}(g) = 2\cos \theta + 1$
 Donc $g \mapsto \cos \theta = \frac{\text{Tr}(g)-1}{2}$ est φ_0
 My cette application prend comme valeur -1 pour avoir $g \in G$ d'angle π .
 Par hypothèse, G possède un élément $g \neq Id$.
 Au lieu de remplacer g par g^{-1} , on peut supposer que la même θ de son angle $\in]0, \pi]$
 Si $\cos(\theta) \leq 0$, on pose $N = g$.
 Si $\cos(\theta) > 0$, on pose $N = \lfloor \frac{\pi}{2\theta} \rfloor$
 donc $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et $N\theta \leq \frac{\pi}{2} < (N+1)\theta < 2\frac{\pi}{2} = \pi$
 g^{N+1} est une rotation d'angle $(N+1)\theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$.
 on pose alors $N = g^{N+1}$.

plus rapide

Puisque G est connexe par arcs, on dispose d'un chemin γ de Id à g .

L'application $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$
 $\varphi(t) \mapsto \frac{1}{2}(\text{Tr}(\gamma(t)) - 1)$ est continue par $\mathcal{C}^0$ de T_2 et γ

Puisque $\varphi(0) = \cos(0) = 1$ et $\varphi(1) = \frac{1}{2}(\text{Tr}(R) - 1) \leq 0$.

Le théorème des valeurs intermédiaires donne $t_0 \in [0,1]$ tq $\varphi(t_0) = 0$.

La rotation $r = \gamma(t_0)$ a un angle de $\pm \frac{\pi}{2}$ et $R = r^2$ un angle π .

4) $\forall g \in \text{SO}_3$, $gRg^{-1} \in G$ et $T_2(gRg^{-1}) = T_2(R)$

Donc gRg^{-1} est d'angle π .

Si un vecteur u appartient à l'axe Δ de R , on a $(gRg^{-1})(gu) = g(u)$, donc gRg^{-1} est le retournement d'axe $g(\Delta)$.

Donc étant donnée une droite Δ de $\mathbb{R}^3$, il suffit de prendre la rotation g de $(\mathbb{R}^3)$ tq $\Delta = g(\Delta)$

Or toute rotation s'écrit comme produit de deux retournements, donc G contient toutes les rotations i.e. $G = \text{SO}_3$.

5) On considère G_0 la composante connexe par arcs de Id .

D'après 2), G_0 est un sous-groupe distingué de $\text{SO}_3(\mathbb{R})$

D'après 4) si $G_0 \neq \{\text{Id}\}$, $G_0 = \text{SO}_3(\mathbb{R})$ donc $G = \text{SO}_3(\mathbb{R})$.

Si $G_0 = \{\text{Id}\}$, alors toutes les composantes connexes par arcs de G sont des singletons.

En effet, si g' est dans la composante de g relié par γ alors $t \mapsto g^{-1}\gamma(t)$ est un chemin de G reliant Id à $g^{-1}g'$.

Ainsi $g^{-1}g' \in G_0 = \{\text{Id}\}$ donc $g' = g$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que G contient un $g \neq \text{Id}$.

Soit h une rotation quelconque, différente de Id , $\theta :=$ mesure de l'angle de h .

$\forall t \in [0,1]$, on note h_t la rotation de même axe que l'angle $t\theta$.

L'application $t \mapsto h_t$ est $\mathcal{C}^0$, car, matriciellement, elle se traduit dans une certaine

BON par $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t\theta) & -\sin(t\theta) & 0 \\ \sin(t\theta) & \cos(t\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

L'application $t \in [0,1] \mapsto h_t g h_t^{-1}$ est un chemin de G , car $G \triangleleft \text{SO}_3(\mathbb{R})$

d'origine g et d'extrémité $h g h^{-1}$.

Ainsi $h g h^{-1} \in$ composante connexe par arcs de g , comme c'est un singleton, $h g h^{-1} = g$.

Or si g est une rotation d'axe Δ , $h g h^{-1}$ est une rotation d'axe $h(\Delta)$, donc

$h(\Delta) = \Delta$.

Absurde: une droite ne peut pas être invariante par toutes les rotations de $\mathbb{R}^3$.