

Exp: $M_n(\mathbb{C}) \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$ est surjective.

plan: 1) $\forall C \in M_n(\mathbb{C})$, $\exp(C) \in \mathbb{C}[C]$

2) $\forall C \in M_n(\mathbb{C})$, $\mathbb{C}[C]^* = \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$

3) $\forall \exp$ est un morphisme de groupe: $(\mathbb{C}[C], +) \rightarrow (\mathbb{C}[C]^*, \times)$

4) $\forall \mathbb{C}[C]^*$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}[C]$

5) $\forall \exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert et fermé dans $\mathbb{C}[C]^*$

6) Conclure

1) Soit $C \in M_n(\mathbb{C})$

Comme $\mathbb{C}[C]$ est un $\mathbb{C}$ -s.v. de $M_n(\mathbb{C})$, il est fermé dans $M_n(\mathbb{C})$

Donc $\exp(C) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} C^k \in \mathbb{C}[C]$.

passé.

2) Soit $C \in M_n(\mathbb{C})$

Pour $\pi \in GL_n(\mathbb{C})$, π^{-1} est un polynôme en π car par Cayley-Hamilton, $\chi_\pi(\pi) = 0$

Or $\chi_\pi(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + (-1)^n \det(\pi) I_n$.

Donc $(-1)^{n+1} \det(\pi) I_n = Q(\pi)/\pi$

Donc $I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\det(\pi)} Q(\pi) \pi$.

polynôme en π .

Soit $\pi \in \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$, π^{-1} est un polynôme en π donc en $\mathbb{C}$

Ainsi $\pi^{-1} \in \mathbb{C}[C]$, donc $\mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}[C]^*$

$\supset$ est facile.

3) $\mathbb{C}[C]$ est un sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{C})$

Donc $\forall (A, B) \in \mathbb{C}[C]^2$, $\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$

Or d'après 1), $\exp(\mathbb{C}[C]) \subset \mathbb{C}[C]$.

Comme $\exp$ est à valeurs dans $GL_n(\mathbb{C})$, sa restriction à $\mathbb{C}[C]$ est bien un

morphisme de groupe qui d'après 2), prend ses valeurs dans $\mathbb{C}[C]^* = \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$.

4) $\mathbb{C}[C]^*$ est un ouvert de $\mathbb{C}[C]$ car c'est $\mathbb{C}[C] \cap \det^{-1}(\mathbb{C}^*)$.

$\forall \mathbb{C}[C]^*$ est connexe par arcs.

Soit $\pi, N \in \mathbb{C}[C]^*$

On voit que $\forall z \in \mathbb{C}$, $z\pi + (1-z)N \in \mathbb{C}[C]$.

On doit trouver un chemin de cette forme dans $GL_n(\mathbb{C})$

La fonction $P: z \mapsto \det(z\pi + (1-z)N)$ est polynomiale en z .

Non nul car $P(0) = \det(N)$ et $N \in GL_n(\mathbb{C})$.

Donc P ne s'annule que sur un nombre fini de points.

On construit donc une fonction $t \mapsto z(t)$ qui évite ses points tel que

$z(0) = 0$ et $z(1) = 1$ (car $P(0)$ et $P(1)$ sont non nuls car P et $N \in GL_n(\mathbb{C})$)

En posant $X(t) = z(t)P + (1-z(t))N$, on obtient le résultat.

Donc $\mathbb{C}[C]^*$ est connexe par arcs, donc est connexe.

5) • $\text{Int exp}(\mathbb{C}[C])$ est ouvert

$D_{\text{exp}}(e) \text{ exp} = \text{Id}$ donc $\det(D_{\text{exp}}(e)) \neq 0$.

exp est $\mathcal{C}^1$.

On applique le théorème d'inversion locale à $\text{exp} : \mathbb{C}[C] \rightarrow \mathbb{C}[C]$

On dispose de $U \ni D_{\text{exp}}(e)$ dans $\mathbb{C}[C]$ et $V \ni \text{Id}$ dans $\mathbb{C}[C]$ tq

$\text{exp} : U \rightarrow V$ soit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme.

En particulier, $\text{exp}(\mathbb{C}[C])$ contient un voisinage de Id .

Soit $A \in \mathbb{C}[C]$, comme $\text{exp} : \mathbb{C}[C] \rightarrow \mathbb{C}[C]$ est un morphisme de groupes.

$$\text{exp}(A+U) = \text{exp}(A) \text{exp}(U) = \text{exp}(A) V$$

Comme $\text{exp}(A) \in GL_n(\mathbb{C})$, $f : \mathbb{C}[C] \rightarrow \mathbb{C}[C]$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme

$$U \mapsto \text{exp}(A)^{-1} U$$

Ainsi, $\text{exp}(A) V = f^{-1}(U)$ est ouvert.

Comme $\text{Id} \in V$, $\text{exp}(A) \in \text{exp}(A) V$

Ainsi, $\text{exp}(A) V$ est un voisinage ouvert de $\text{exp}(A)$ dans $\mathbb{C}[C] \subset \text{exp}(\mathbb{C}[C])$.

Donc $\text{exp}(\mathbb{C}[C])$ contient un voisinage de chacun de ses points, c'est donc un ouvert.

• $\text{Int exp}(\mathbb{C}[C])$ est fermé.

Soit G un groupe et H un sous groupe de G .

L'ensemble des classes à gauche de G forment une partition de G : $G = \bigcup_{a \in G} aH$ donc à gauche

Donc $G \setminus H = \bigcup_{\substack{a \in G \\ a \notin H}} aH = \bigcup_{a \in G \setminus H} aH$

$$\text{Ainsi } \mathbb{C}[C]^* \setminus \text{exp}(\mathbb{C}[C]) = \bigcup_{A \in \mathbb{C}[C]^* \setminus \text{exp}(\mathbb{C}[C])} A \text{exp}(\mathbb{C}[C])$$

Ainsi $\mathbb{C}[C]^* \setminus \text{exp}(\mathbb{C}[C])$ est une réunion d'ouvert donc c'est un ouvert

Donc $\text{exp}(\mathbb{C}[C])$ est un fermé.

6) $\text{exp}(\mathbb{C}[C])$ est ouvert, fermé, $\neq \emptyset$ d'après 5)
 $\hookrightarrow \text{exp}(C)$

donc comme $\mathbb{C}[C]$ est connexe d'après 4) $\text{exp}(\mathbb{C}[C]) = \mathbb{C}[C]^*$.

Soit $C \in GL_n(\mathbb{C})$, $C \in \mathbb{C}[C]$ donc $C \in \mathbb{C}[C]^*$.

Par ce qui précède, $C \in \text{exp}(\mathbb{C}[C])$

Donc $C \in \text{Int}(\text{exp})$.