

# CRITERE DE SYLVESTER.

Lemme: Soit  $(E, q)$  un espace quadratique,  $F$  un sev de  $E$  de dimension finie. Alors, si  $q|_F$  est définie, on a que  $F \oplus F^\perp = E$ .

Preuve:

- Si  $x \in F \cap F^\perp$ , alors,  $\phi(x) = q(x) = 0$ , donc  $x = 0$  car  $q$  est définie.
- Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $F$   $q$ -orthogonale. Pour  $x \in E$ , on pose pour  $i = 1, \dots, n$ ,

$$\lambda_i = \frac{\phi(x, e_i)}{q(e_i)} \leftarrow \neq 0 \text{ car } q|_F \text{ définie}$$

Soit  $f = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in F$ . On a alors pour tout  $k = 1, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \phi(x - f, e_k) &= \phi(x, e_k) - \phi(f, e_k) \\ &= \phi(x, e_k) - \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi(e_i, e_k) \\ &= \phi(x, e_k) - \lambda_k q(e_k) = 0. \end{aligned}$$

Donc  $x - f \in F^\perp$ , et  $x = (x - f) + f$ .

Théorème:  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow A \in S_n(\mathbb{R})$  et  $\forall k \geq 1$ ,  $\det(A_k) > 0$  avec  $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}$ .

Preuve:

- Supposons  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ . On note  $q$  la forme quadratique qui admet  $A$  dans la base canonique. Alors,  $q$  est définie positive. Soit  $k = 1, \dots, n$  et  $E_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ . Alors,  $q|_{E_k}$  est définie positive donc  $\text{Sgn}(q|_{E_k}) = (k, 0)$ . D'après le loi d'inertie de Sylvester,  $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$  tq.  $\text{Mat}(q|_{E_k}) = {}^t P \text{Id}_k P$ .

Donc  $\det(\text{Mat}(q|_{E_k})) = \det(A_k) = \det(P)^2 > 0$ .

- On montre la réciproque sur la taille  $n$  de la matrice  $A$ .

→ si  $n=1$ ,  $A = \det A > 0$  par hypothèse

→ Supposons le résultat acquis jusqu'à  $n-1 \geq 1$ . Soit  $A \in S_n(\mathbb{R})$ , avec  $\det(A_k) > 0 \forall k=1, \dots, n$ .

On note  $q$  la  $q$  ayant  $A$  pour matrice dans la base canonique. Par hypothèse de récurrence,  $A_{n-1} \in S_{n-1}^{++}(\mathbb{R})$ . Donc  $q|_{E_{n-1}}$  est définie positive (donc non dégénérée). Par le lemme,  $E_{n-1} \oplus E_{n-1}^\perp = E$ . Or,  $\exists e \in E$  tq.  $E_{n-1}^\perp = \text{Vect}(e)$ , donc

$$\pi = \text{Mat}_{(e_1, \dots, e_{n-1}, e)}(q) = \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & q(e) \end{bmatrix}$$

et  $A$  est congrue à  $\pi$ . Donc il existe  $Q \in GL_n(\mathbb{R})$  tq.  $\pi = {}^t Q A Q$ . Comme  $\det(A) > 0$ ,  $\det(\pi) > 0$ , donc,  $q(e) = \frac{\det(\pi)}{\det(A_{n-1})} > 0$ . Donc  $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

Application:  $S = \left( \frac{1}{|i-j|+1} \right)_{i,j} \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

Preuve: Soit  $\pi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}_m(\mathbb{R})$   
 $t \mapsto (t^{|i-j|})_{1 \leq i,j \leq m}$ .

On mq.  $\forall t \in ]0,1[$ ,  $\pi(t) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ , en montrant que  $\forall k=1, \dots, n$ ,  $\det(\pi_k(t)) > 0$ .

→ si  $k=1$ ,  $\det(\pi_1(t)) = 1 > 0$ .

→ Si  $\det(\pi_k(t)) > 0$  pour un  $k \in \{1, \dots, n-1\}$ ,

$$\det(\pi_{k+1}) = \begin{vmatrix} 1 & \dots & t^{k-1} & t^k \\ t & & t^{k-2} & t^{k-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ t^k & & t & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_{k+1} \leftarrow C_{k+1} - tC_k} \begin{vmatrix} 1 & \dots & t^{k-1} & 0 \\ t & & t^{k-2} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ t^k & & t & 1-t^2 \end{vmatrix} = (1-t^2) \det(\pi_k) > 0.$$

Donc,  $\pi(t) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

Soit  $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , pour tout  $0 < t < 1$ ,  ${}^tX \pi(t) X > 0$ , et  $t \mapsto {}^tX \pi(t) X$  est continue sur  $[0, 1]$ .

Donc,

$$0 < \int_0^1 {}^tX \pi(t) X dt = {}^tX \left( \int_0^1 \pi(t) dt \right) X = {}^tX S X.$$

Donc,  $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ .

**Remarques:**

- ▷ Développement assez sympa avec une petite application. Pour autant, comme il y a deux récurrences à faire, il est un peu long. Quand je montrais le lemme, j'étais très pressé pour finir. Du coup, m'j'étais tombé dessus à l'oral, je me l'aurais probablement pas montré...
- ▷ Jolie application de la loi d'inertie de Sylvester...