

Théorème de Flanders

Loïc Gardey

2024-2025

Référence

[CVA] Philippe CALDERO et Marie PERONNIER. *Carnet de voyage en Algérie*. 2ème édition. Calvage et Mounet, 2022.

La référence utilisée est [CVA][pages 112-115]

Théorème 1 (Flanders). Soit $\mathcal{E}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $\max\{\text{rg}(A), A \in \mathcal{E}\} = r$. Alors $\dim(\mathcal{E}) \leq nr$.

On va décomposer la démonstration en plusieurs étapes.

1. La borne est atteinte : il existe un sous-espace $\mathcal{E}_r$ qui vérifie les hypothèses du théorème de Flanders et tel que $\dim(\mathcal{E}_r) = nr$.
2. On fixe une matrice $A \in \mathcal{E}$ telle que $\text{rg}(A) = r$. On peut alors se ramener au cas où $A = J_r$ avec $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ ce que l'on supposera par la suite.
3. Soit $Y \in \mathcal{E}$ que l'on décomposera par blocs :

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{matrix} Y_{11} \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R}), & Y_{12} \in \mathcal{M}_{r,n-r}(\mathbb{R}), \\ Y_{21} \in \mathcal{M}_{n-r,r}(\mathbb{R}), & Y_{22} \in \mathcal{M}_{n-r,n-r}(\mathbb{R}). \end{matrix}$$

Pour tout $s, t \in \{r+1, \dots, n\}$, on note L_s la $(s-r)$ -ième ligne de Y_{21} et C_t la $(t-r)$ -ième colonne de Y_{12} . Et on note y_{st} le coefficient (s, t) de Y . On montre que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$P_{st}(\lambda) := \begin{vmatrix} I_r + \lambda Y_{11} & \lambda C_t \\ \lambda L_s & \lambda y_{st} \end{vmatrix} = 0$$

4. En exprimant (de deux manières!) les termes de degré 1 et 2 en λ dans le développement du déterminant $P_{st}(\lambda)$, montrons que pour tout $Y \in \mathcal{E}$ et $s, t \in \{r+1, \dots, n\}$, $y_{st} = 0$ et $L_s C_t = 0_{1,1}$.
5. Soit $m > 0$ un entier naturel et q la forme quadratique sur $\mathbb{R}^{2m}$, définie par $q(x_1, y_1, \dots, x_m, y_m) = \sum_{i=1}^m x_i y_i$. Montrons que q est non dégénérée et déduire qu'un sous-espace de $\mathbb{R}^{2m}$ sur lequel q s'annule est de dimension inférieure à m .
6. On considère le morphisme $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R})$ qui envoie Y sur Y_{11} . Montrons que $\dim(\ker(\pi)) \leq r(n-r)$. On peut ensuite conclure la démonstration du théorème de Flanders par la formule du rang.

Démonstration du point 1.

Soit $\mathcal{E}_r = \left\{ \begin{pmatrix} M & 0_{r,n-r} \end{pmatrix} \mid M \in \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R}) \right\} \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

C'est bien un sous-espace vectoriel de dimension nr et les matrices sont de rang maximal égal à r , atteint par exemple pour $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$ $\square$

Démonstration du point 2.

Soit $A \in \mathcal{E}$ de rang maximal r .

Par le théorème du rang, $\exists P, Q \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $PAQ = J_r$.

L'application $\begin{cases} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ Y \mapsto PYQ \end{cases}$ est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On a donc que $\{PYQ \mid Y \in \mathcal{E}\} = P\mathcal{E}Q \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\dim(P\mathcal{E}Q) = \dim(\mathcal{E})$.

Comme $PAQ = J_r$, on a que $J_r \in P\mathcal{E}Q$.

Ainsi, quitte à changer $\mathcal{E}$ en $P\mathcal{E}Q$, on peut supposer que $J_r \in \mathcal{E}$. $\square$

Démonstration du point 3.

Soit $Y \in \mathcal{E}$ définie comme dans le point 3 avec la même décomposition par blocs.

On a aussi $J_r \in \mathcal{E}$. Ainsi, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, J_r + \lambda Y = \begin{pmatrix} I_r + \lambda Y_{11} & \lambda Y_{12} \\ \lambda Y_{21} & \lambda Y_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{E}$.

Donc $\text{rg}(J_r + \lambda Y) \leq r$.

Ainsi, $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall s, t \in \{r+1, \dots, n\}, P_{st}(\lambda) := \begin{vmatrix} I_r + \lambda Y_{11} & \lambda C_t \\ \lambda L_s & \lambda y_{st} \end{vmatrix} = 0$ car c'est un mineur de $J_r + \lambda Y$ de taille $r+1 > \text{rg}(J_r + \lambda Y)$. $\square$

Démonstration du point 4.

Pour trouver les formules demandées au point 4, cherchons les termes de degrés 1 et 2 de $P_{st}(\lambda)$ en λ . Comme on travaille sur $\mathbb{R}$, on peut identifier la fonction $\lambda \mapsto P_{st}(\lambda)$ à un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. Or $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P_{st}(\lambda) = 0$, donc on a que $P_{st} = 0$ et tous ses coefficients sont nuls.

Utilisons la linéarité de $P_{st}(\lambda)$ par rapport à la dernière colonne :

$$P_{st}(\lambda) = \lambda \begin{vmatrix} I_r + \lambda Y_{11} & C_t \\ \lambda L_s & y_{st} \end{vmatrix} := \lambda Q_{st}(\lambda) = 0$$

On a que $Q_{st} = 0$ car $0 = P_{st} = XQ_{st}$. Cherchons donc les termes de degrés 0 et 1 de Q_{st} .

Le terme de degré 0 est $Q_{st}(0) = \begin{vmatrix} I_r & C_t \\ 0 & y_{st} \end{vmatrix} = y_{st}$. Donc $y_{st} = 0$.

Maintenant, utilisons la linéarité de $Q_{st}(\lambda)$ par rapport à la dernière ligne :

$$Q_{st}(\lambda) = \begin{vmatrix} I_r + \lambda Y_{11} & C_t \\ \lambda L_s & 0 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} I_r + \lambda Y_{11} & C_t \\ L_s & 0 \end{vmatrix} := \lambda R_{st}(\lambda) = 0$$

Le terme de degré 1 de Q_{st} est donc le terme de degré 0 de R_{st} (qui est encore nul) car $Q_{st} = XR_{st}$. Donc $R_{st}(0) = \begin{vmatrix} I_r + \lambda Y_{11} & C_t \\ L_s & 0 \end{vmatrix}$. Or $\begin{vmatrix} I_r & 0_{r,1} \\ -L_s & 0 \end{vmatrix} = 1$. Donc

$$R_{st}(0) = \begin{vmatrix} I_r + \lambda Y_{11} & C_t \\ L_s & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_r & 0_{r,1} \\ -L_s & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} I_r + \lambda Y_{11} & C_t \\ L_s & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_r & C_t \\ 0_{1,r} & -L_s C_t \end{vmatrix} = -L_s C_t$$

Comme R_{st} est nul, on a donc montré que $L_s C_t = 0$. $\square$

Démonstration du point 5.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et la forme quadaratique $q : \begin{cases} \mathbb{R}^{2m} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, y_1, \dots, x_m, y_m) & \mapsto \sum_{i=1}^m x_i y_i \end{cases}$.

La matrice de q dans la base canonique est une matrice diagonale par blocs $\text{Diag}(S, \dots, S)$ avec $S = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. Le déterminant de cette matrice est $\frac{(-1)^m}{4^m} \neq 0$. Donc q est non dégénérée.

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{2m}$ tel que $\forall x \in F, q(x) = 0$.

Si on écrit q avec sa forme polaire $b(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x) - q(y)}{2}$, on a que $\forall x \in F, b(x, x) = 0$, donc $F \subset F^\perp$.

On a donc $\dim(F) \leq \dim(F^\perp)$.

Or, $\dim(F^\perp) = 2m - \dim(F)$ car q est non dégénérée.

Donc $2 \dim(F) \leq 2m$. Et ainsi, $\dim(F) \leq m$. □

Démonstration du point 6.

On note $\pi : \begin{cases} \mathcal{E} & \rightarrow \mathcal{M}_{r,r}(\mathbb{R}) \\ Y & \mapsto Y_{11} \end{cases}$.

On a par le point 4, que $\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix}, \text{telles que } Y_{21} Y_{12} = 0_{n-r, n-r} \right\}$.

Donc $\left\{ \begin{pmatrix} 0_{r,r} & Y_{12} \\ Y_{21} & 0_{n-r, n-r} \end{pmatrix}, \text{telles que } Y_{21} Y_{12} = 0_{n-r, n-r} \right\} = \ker(\pi)$.

Posons $Y_{21} = (x_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n-r \\ 1 \leq j \leq r}}$ et $Y_{12} = (y_{ji})_{\substack{1 \leq j \leq r \\ 1 \leq i \leq n-r}}$.

Alors $\sum_{\substack{1 \leq i \leq n-r \\ 1 \leq j \leq r}} x_{ij} y_{ji} = \text{tr}(Y_{21} Y_{12}) = 0$.

En utilisant le point 5 avec $m = (n-r)r$, on a que $\dim(\ker(\pi)) \leq (n-r)r$.

On a que $\text{rg}(\pi) = r^2$ et par la formule du rang, on a ainsi :

$$\dim(\mathcal{E}) = \dim(\ker(\pi)) + \text{rg}(\pi)$$

$$\dim(\mathcal{E}) \leq (n-r)r + r^2$$

$$\dim(\mathcal{E}) \leq nr$$

□