Théorème : Soient m,n deux entiers. On considère l'action par translation :

$$\begin{aligned} GL_m(\mathbb{K}) \times M_{m,n}(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_{m,n}(\mathbb{K}) \\ (A, X) &\longmapsto AX \end{aligned}$$

Alors, toute matrice est dans l'orbite d'une unique matrice échelonnée réduite en lignes i.e.

$$M_{m,n} = \dot{\bigsqcup_{E \in \mathcal{E}}} GL_m(\mathbb{K}).E$$

Preuve : On appelle (ici) matrice échelonnée réduite (dont on note l'ensemble $\mathcal{E}$) une matrice sous la forme :

$$E = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 & * & 0 & * & 0 & * & \\ | & 0 & 0 & 1 & * & 0 & * & \\ | & | & | & 0 & 0 & 0 & * & \\ | & | & | & | & | & 1 & * & \cdots \\ | & | & | & | & | & | & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \\ \quad\ j_1 \qquad\ j_2 \quad\ j_3 \qquad\qquad \end{array}$$

i.e. les pivots sont des 1 et les ~~non~~ pivots sont les seuls éléments non nuls de la colonne. On notera $j = (j_1, j_2, \dots, j_r)$ le type d'une telle matrice i.e. la liste des indices des colonnes où sont les pivots. Il y a autant de pivot que le rang de E, i.e. $r = \operatorname{rg} E$. Passons à la preuve :

L'égalité des ensembles est exactement le pivot de Gauss : $\supseteq$ est claire. Si $M \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, alors l'algorithme du pivot de Gauss assure d'arriver à une matrice de $\mathcal{E}$ en multipliant à gauche par des matrices d'opérations élémentaires toutes inversibles. Donc $\exists P \in GL_m(\mathbb{K})$ et $\exists E \in \mathcal{E}$ tq. $PM = E \Leftrightarrow M = P^{-1}E \in GL_m(\mathbb{K}).E$.

On montre maintenant que la réunion est disjointe i.e. l'unicité de la forme échelonnée réduite. Soient $E, E' \in \mathcal{E}$ tq. $\exists P \in GL_m(\mathbb{K})$, $E' = PE$. On mq. $E = E'$. D'abord, comme $P \in GL_m(\mathbb{K})$, $\operatorname{rg} E = \operatorname{rg} E' = r$. On note alors $j = (j_1, \dots, j_r)$ et $j' = (j'_1, \dots, j'_r)$ les types de E et E'.

On va montrer par récurrence sur $r \geq 0$:

$\mathcal{P}_r$: " $\forall m,n \geq r$, $E' = E$ et P est de la forme : $P = \left[\begin{array}{c|c} I_r & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right]$ ".

* Si $r = 0$, alors, $E = E' = 0$ et n'importe quel P convient.
* On suppose le résultat acquis jusqu'à $r-1 \geq 0$. On prend $(e_j)_j$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et $(f_j)_j$ la base canonique de $\mathbb{K}^m$. Comme $E, E' \in \mathcal{E}$, on a :

$$Ee_{j_k} = f_k \quad \text{et} \quad E'e_{j'_k} = f_k \qquad (\mathcal{D})$$

De plus, $\forall 1 \leq j \leq j_1 - 1$, $Ee_j = 0$ et $Ee_{j_1} = f_1 \neq 0$. Donc, $E'e_j = 0$ et $E'e_{j_1} \neq 0$ (on multiplie par P inversible). Donc, $j_1 = j'_1$ et $Pf_1 = PEe_{j_1} = E'e_{j_1} = E'e_{j'_1} = f_1$, et P est de la forme :

$$P = \left[\begin{array}{c|c} 1 & \tilde{P} \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] \begin{array}{l} \updownarrow 1 \\ \updownarrow m-1 \end{array}$$

On écrit pour la suite $E = \left[\begin{array}{c} L \\ \hline F \end{array}\right]$ et $E' = \left[\begin{array}{c} L' \\ \hline F' \end{array}\right]$ avec $L, L' \in M_{1,n}(\mathbb{K})$, de sorte que

$F' = QF$. Or, F et F' sont échelonnées réduites de type $(j_2, \dots, j_r)$ et $(j'_2, \dots, j'_r)$. $(\mathcal{D})$

On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence qui donne $F = F'$ donc $j = j'$ et

$$Q = \left[\begin{array}{c|c} I_{r-1} & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right].$$

Enfin, $\forall 2 \leq k \leq r$, le coefficient d'indice $(1, j_k) = (1, j'_k)$ de E' est nul $(\mathcal{D})$ et donc :

$$0 = {}^t f_1 E' e_{j_k} = {}^t f_1 P E e_{j_k} = {}^t f_1 P f_k = \tilde{p}_{1k}.$$

Donc P est de la forme voulue. En écrivant $E = \left[\frac{E_r}{0}\right]$ et $E' = \left[\frac{E_r'}{0}\right]$ il vient que :

$$E' = \left[\frac{E_r'}{0}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_r & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right]\left[\frac{E_r}{0}\right] = \left[\frac{E_r}{0}\right] = E$$

Ce qui achève la preuve.

Remarques :

▷ Âmes raisonnables qui lisez ceci,
Fuyez vite pour vos vies,
Pour vous autres, âmes téméraires,
Voici quelques conseils pour bien faire.

▷ Vous aurez bien compris que je déconseille hautement ce développement, assez pénible. Pourtant, peut-être que certains d'entre vous voudront prendre ce développement car il bouchera les trous, comme ça a été le cas pour moi.

▷ La notion de type d'une matrice échelonnée n'a rien de traditionnel, il faut expliquer ce que c'est pendant l'oral. Je pense que le seul moyen de rendre la récurrence compréhensible est de faire le dessin d'une matrice de (E) et d'expliquer les choses dessus. Les arguments notés avec un (D) se ~~voit~~ voient très facilement sur le dessin !! Il faut s'en servir.

▷ Si on m'avait demandé à quoi ça sert, j'aurais répondu que cela affine le pivot de Gauss : le pivot de Gauss garantit l'existence de la forme échelonnée, on montre ici l'unicité.

▷ Courage pour ce qui choisiront ce dev.