

Théorème de Weierstrass:

Réf: [Goursat 304]

Énoncé: Si J est un segment de $\mathbb{R}$ et si $f: J \rightarrow \mathbb{C}$ est continue, alors f est limite uniforme sur J d'une suite de fonctions polynôme.

Étapes:

1] $\forall c > 0$, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ déf par $p_n: t \mapsto \begin{cases} \frac{(1 - (\frac{t}{c})^2)^n}{a_n} & |t| \leq c \\ 0 & \text{si } |t| > c \end{cases}$
où $a_n = \int_{-c}^c (1 - (\frac{t}{c})^2)^n dt$

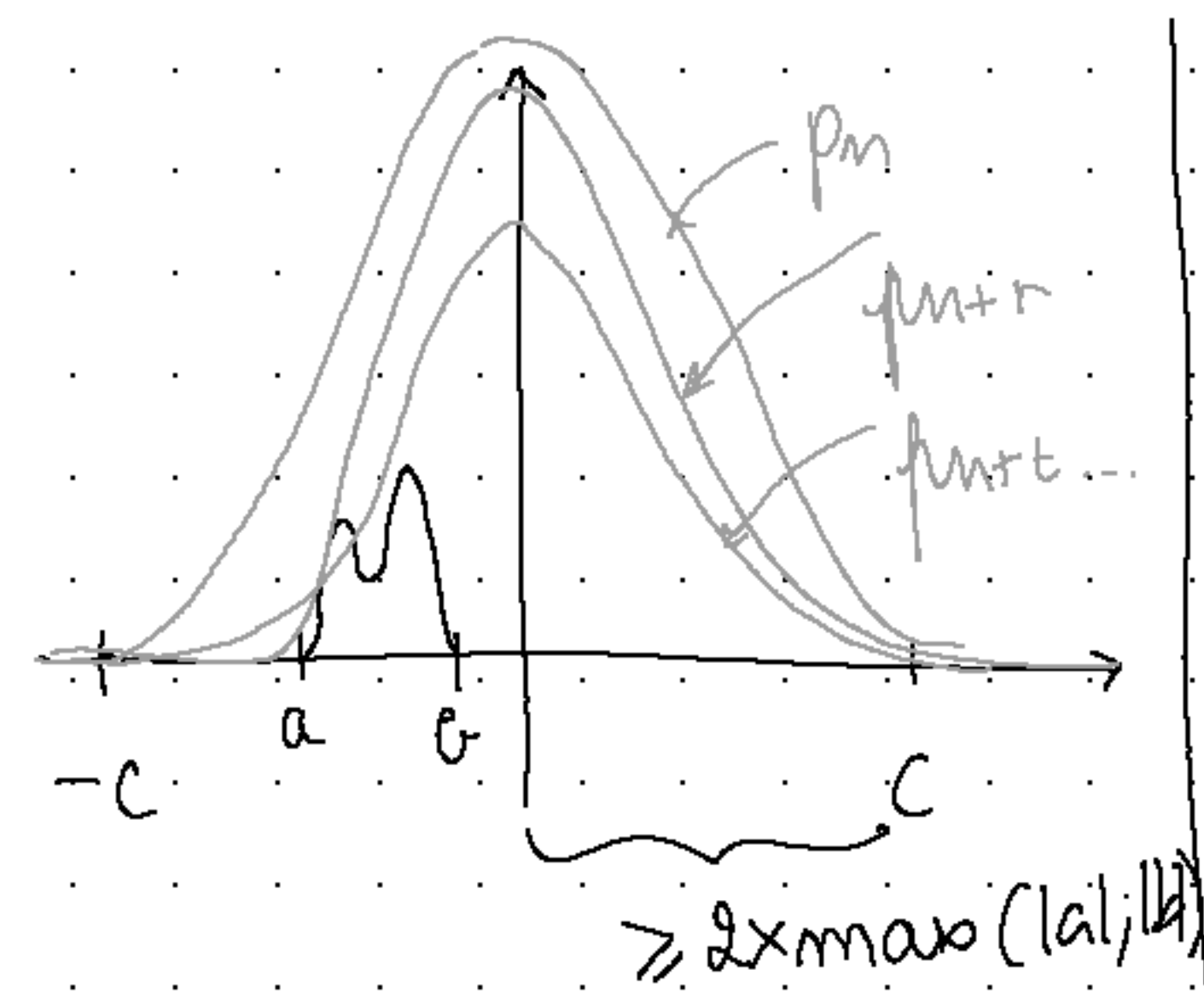
est une approximation de l'identité

2] Pour toute fonction f à support dans $[-\frac{c}{2}; \frac{c}{2}]$, $\forall n$, $f * p_n$ est un polynôme

3] Conclure

Démonstration:

Soit J un segment de $\mathbb{R}$, $f: J \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue
Soit $c > 2 \max(|a|; |b|)$, on a $J \subset [-\frac{c}{2}; \frac{c}{2}]$



1] Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$p_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto \begin{cases} \frac{(1 - (\frac{t}{c})^2)^n}{a_n} & \text{si } |t| \leq c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$a_n = \int_{-c}^c (1 - (\frac{t}{c})^2)^n dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} p_n(t) dt = \frac{1}{a_n} \int_{-c}^c \left(1 - \left(\frac{t}{c}\right)^2\right)^n dt = 1$ par définition de a_n .

Soit $\alpha > 0$,

si $\alpha \geq c$, $\int_{|t| \geq \alpha} p_n(t) dt = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{|t| \geq \alpha} p_n(t) dt \right) = 0$

si $\alpha < c$, $\int_{|t| \geq \alpha} p_n(t) dt = 2 \int_{\alpha}^c \frac{\left(1 - \left(\frac{t}{c}\right)^2\right)^n}{a_n} dt$

$$\text{or, } a_n = \int_{-c}^c \left(1 - \left(\frac{t}{c}\right)^2\right)^n dt = c \int_{-1}^1 (1-s^2)^n ds$$

$$= 2c \int_0^1 (1-s^2)^n ds$$

et $\forall s \in [0; 1]$, $s(1-s^2)^n \leq (1-s^2)^n$

$$\text{Donc } a_n \geq \underbrace{2c \int_0^1 s(1-s^2)^n ds}_{= -c \left[\frac{(1-s^2)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1}$$

$$\text{Donc } a_n \geq \frac{c}{n+1}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{a_n} \leq \frac{n+1}{c}$$

$$\text{Donc } \int_{|t| \geq \alpha} p_n(t) dt \leq \frac{2(n+1)}{c} \underbrace{\int_{\alpha}^c \left(1 - \left(\frac{t}{c}\right)^2\right)^n dt}_{= c \int_{\frac{\alpha}{c}}^1 (1-s^2)^n ds}$$

$$\leq 2(n+1) \int_{\frac{\alpha}{c}}^1 (1-s^2)^n ds$$

$$\leq 2(n+1) \underbrace{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2\right)^n}_{< 1} \left(1 - \frac{\alpha}{c}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une approximation de l'identité.

2] On pose $g: [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}] \rightarrow \mathbb{C}$

$$x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in [a; b] \\ \frac{f(a)}{a + \frac{c}{2}} (x + \frac{c}{2}) & \text{si } x \in [-\frac{c}{2}; a[\\ \frac{f(b)}{b - \frac{c}{2}} (x - \frac{c}{2}) & \text{si } x \in]b; \frac{c}{2}] \\ 0 & \text{si } |x| > \frac{c}{2} \end{cases}$$

g est à support dans $[-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$

$(g * f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions à support compact qui converge uniformément vers g sur $\mathbb{R}$.

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$,

$$\begin{aligned} (g * f_n)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x-t) g(t) dt \\ &= \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} f_n(x-t) g(t) dt \end{aligned}$$

or $\forall t \in [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$, comme $x \in [-\frac{c}{2}, \frac{c}{2}]$,

$$-c \leq x-t \leq c$$

$$\text{Donc } (g * f_n)(x) = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{(1 - (\frac{x-t}{c})^2)^n}{a_n} g(t) dt$$

$$= \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{1}{a_n} g(t) \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{c^k} (x-t)^{2k} dt$$

or $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{c^k} (x-t)^{2k} = \sum_{k=0}^{2n} q_k(t) x^k$ où $q_k(t)$ est un polynôme en t indépendant de x .

Donc

$$(g * p_n)(x) = \sum_{k=0}^{2n} \left(\int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{q_k(t)}{a_n} g(t) dt \right) x^k$$

Donc $g * p_n$ est une fonction polynomiale sur $[-\frac{c}{2}; \frac{c}{2}]$. suite de

Donc g est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[-\frac{c}{2}; \frac{c}{2}]$ et en particulier donc f est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales sur $[a; b]$.

Questions/remarques:

• Pourquoi une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support compact est-elle unif. continue sur $\mathbb{R}$?

$f|_{[a; b]}$ unif. continue

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in [a; b]^2$$

$$|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Soit $x \in [a; b], y \in \mathbb{R} \setminus [a; b]$

si $|x - y| \leq \eta$ alors $x \in [a; a + \eta]$ ou $x \in [b - \eta; b]$

donc $|f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$

or $f(a) = f(y) = 0$ donc $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$

de même autour de b ou

• $\triangle$ Si f est unif-continue sur $\mathbb{R}$ et f n'est pas un polynôme, $\exists (P_n)$ polynômes $P_n \xrightarrow{U} f$ sur $\mathbb{R}$

Si on a ça alors f est un polynôme

• Comparaison avec la preuve par les polynômes de Bernstein

$\triangleright$ Si on prend $f \in \mathcal{C}^1$ au lieu de f simplement continue, peut-on approcher f et f' du même coup?

Thm bis: f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$

$\exists P_n$ une suite de polynôme tq

$$\|f - P_n\|_{\mathcal{C}^1} = \|f - P_n\|_{\infty} + \|f' - P_n'\|_{\infty}$$

Si f est $\mathcal{C}^1$, $(f * p_n)' = f' * p_n$

et $f' * p_n \xrightarrow{CVU} f'$

$\hookrightarrow$ On prend $p_n = \begin{cases} \frac{(1-t^2)^n}{a_n} & \text{si } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On prolonge f et F de manière $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à support

compact

$F * p_n$ est un polynôme $\forall n$

$$F * p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{U} F = f \text{ sur } [a; b]$$

$$(F * p_n)' = F' * p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} F' = f' \text{ sur } [a; b]$$

Ponc l'intérêt de cette preuve est que on a accès à cette approximation uniforme des dérivées de f avec la même suite de polynôme.