

Formule de Stirling par les intégrales de Wallis:

Référence: [Gœudon]

Énoncé $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$

Étapes:

(E1) Établir la formule de Wallis à partir des intégrales $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n dx$

$$\frac{1}{p} \left[\frac{(2p-1) \cdots 1}{(2p-2) \cdots 2} \right]^2 \rightarrow \pi \text{ (autrement: } \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\pi n} \text{)}$$

(E2) En étudiant la suite $u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$,

mq cette suite converge vers $k > 0$

(E3) À l'aide des équivalents $n! \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k} n^n e^{-n} \sqrt{n}$

et de $\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\pi n}$, trouver la valeur de k .

(E1) $\forall n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)^n dx$$

on a alors par intégrations par parties, pour $n \geq 2$

$$I_n = \underbrace{\left[-\cos(x) \sin(x)^{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}}_{=0} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^2 \times (n-1) \sin(x)^{n-2} dx$$

$$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin(x)^2) \sin(x)^{n-2} dx$$

$$= (n-1) (I_{n-2} - I_n)$$

$$\text{Donc } I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

et on a alors la récurrence immédiate $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_{2m} = \frac{(2m-1)(2m-3) \cdots 1}{(2m)(2m-2) \cdots 2} I_0 = \frac{(2m)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$I_{2m-1} = \frac{(2m-2)(2m-4) \cdots 2}{(2m-1)(2m-3) \cdots 3} I_1 = \frac{2^n n! \times 2^{n-1} (n-1)!}{(2m)!}$$

on a aussi $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2: 0 < \sin(x)^{2n+1} \leq \sin(x)^{2n} \leq \sin(x)^{2n-1}$

$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}]$. Donc en intégrant,

$$0 < I_{2m} \leq I_{2m-1} \leq I_{2m-2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } 1 &\leq \frac{I_{2m-1}}{I_{2m}} \leq \frac{I_{2m-2}}{I_{2m}} = \frac{(2m-3) \cdots 1}{(2m-2) \cdots 2} \times \frac{2m(2m-2) \cdots 2}{(2m-1) \cdots 1} \\ &= \frac{2m}{2m-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

Donc $\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

or $\frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} = \frac{(2^n \cdot n!)^2}{(2n)!} \cdot \frac{2}{\pi} \times \frac{2^n n! \cdot 2^{n-1} (n-1)!}{(2n)!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

$$= \frac{1}{n} \times \left(\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi$$

Donc $\frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \sim \sqrt{\pi n}$

(E2) On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$, définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!}$$

on cherche à mq $(u_n)_{n \geq 1}$ a une limite

Pour ça on va mq $\sum_{n \geq 1} \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ a une limite.

on regarde alors la série $\sum_{n \geq 1} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{(n+1)^{(n+1)} e^{-(n+1)} \sqrt{n+1}}{(n!)^{\cancel{1}} \cdot \frac{\cancel{n^n} e^{-n} \sqrt{n}}{n!}}\right)$$

$$= \ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{e}\right) = (n+\frac{1}{2}) \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{=1} - \underbrace{\ln(e)}_{=1}$$

$$\stackrel{=}{=} \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

Donc $\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) \stackrel{=}{=} 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Donc par comparaison de séries à termes positifs,

$$\sum_{n \geq 1} P_n \left(\frac{e^{-n} n^n}{n!} \right) \text{ converge.}$$

Donc, s'agissant d'une somme télescopique on en conclut que $(P_n(2n))_{n \geq 1}$ converge donc par continuité de exp, $(2n)_{n \geq 1}$ converge.

On note k sa limite.

$$\frac{n^n e^{-n} \sqrt{n}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} k$$

$$(E3) \text{ On a donc } n! \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k} n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

$$\text{Et par ailleurs, } \frac{(2^n n!)^2}{(2n)!} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\pi n}$$

$$\text{Donc } \cancel{2^{2n}} \times \frac{1}{k^2} \cancel{n^{2n}} \cancel{e^{-2n}} \cancel{n} \times \frac{1}{\frac{1}{k} \cancel{(2n)^{2n}} \cancel{e^{-2n}} \sqrt{2n}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\pi n}$$

$$\text{Donc } \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$$

$$\text{Donc finalement } n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$$