101, 105, 106
190

Ref:

Théorème de Brauer :

Soit $n \geq 1$. A $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on associe $T_\sigma = (\delta_{\sigma(i),j})_{ij} \in Gl_n(K)$.
Soit K un corps

$T : \mathfrak{S}_n \to Gl_n(K)$ est un morphisme de groupes.
$\sigma \mapsto T_\sigma$

Théorème : σ et $\tilde\sigma$ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ $\Leftrightarrow$ T_σ et $T_{\tilde\sigma}$ sont semblables dans $Gl_n(K)$.

démo :

- T est un morphisme : $T_\sigma . T_{\tilde\sigma} = (c_{ij})_{ij}$ $c_{ij} = \sum_k \delta_{\sigma(i) k} \delta_{\tilde\sigma(k) j} = \delta_{\tilde\sigma \circ \sigma(i), j}$ $\Rightarrow T_\sigma . T_{\tilde\sigma} = T_{\sigma\tilde\sigma}$. et $T_{id} = I_n$.

$\Rightarrow$ Ainsi, ~~conjugué~~ $\tilde\sigma = \tau\sigma\tau^{-1} \Rightarrow T_{\tilde\sigma} = T_\tau . T_\sigma (T_\tau)^{-1}$

$\Leftarrow$ On écrit $\sigma = c_1 \circ \dots \circ c_r$; $\tilde\sigma = \tilde c_1 \circ \dots \circ \tilde c_s$, décomposition en produit de cycles à supports disjoints.
Pour c_i cycle, $l(c_i)$ = longueur de c_i.
$\forall k \geq 2$ $n_k = \# \{ i \text{ tq } l(c_i) = k \}$, $\tilde n_k = \# \{ i \text{ tq } l(\tilde c_i) = k \}$.

On va utiliser le Lemme : σ est conj à $\tilde\sigma$ dans $\mathfrak{S}_n \Leftrightarrow n_k = \tilde n_k$ $\forall k \geq 2$.

démo Lemme : On a $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau c_1 \tau^{-1}) \dots (\tau c_r \tau^{-1})$

$\Rightarrow$ Pour $c_i = (a_{i,1} \dots a_{i,l(c_i)})$, $\tau c_i \tau^{-1} = (\tau(a_{i,1}) \dots \tau(a_{i,l(c_i)}))$, cycle de longueur $l(c_i)$. Donc la conjugaison dans $\mathfrak{S}_n$ préserve n_k.

$\Leftarrow$ On a une permutation τ tq $\tau(a_{i,j}) = l(c_1) + \dots + l(c_{i-1}) + j$, $\forall 1 \leq i \leq r$
$\forall 1 \leq j \leq l(c_i)$

car les $[\![1; l(c_1)]\!]$; $[\![l(c_1)+\dots+l(c_{i-1})+1 ; l(c_1)+\dots+l(c_i)]\!]$ sont disjoints et inclus dans $[\![1;n]\!]$
car $\sum_{i=1}^{r} l(c_i) = \sum_{k=2}^{n} k n_k \leq n$.

Donc si $n_k = \tilde n_k$, on a déjà $r = s = \sum_k n_k$. En réordonnant les $c_i, \tilde c_j$
par longueur croissante, on aura σ conjuguée à $(1 \dots l(c_1)) \dots (l(c_1)+\dots+l(c_{r-1})+1 \dots l(c_1)+\dots+l(c_r))$
$\tilde\sigma$ conjugué à $(1 \dots l(\tilde c_1)) \dots (l(\tilde c_1)+\dots+l(\tilde c_{r-1})+1 \dots l(\tilde c_1)+\dots+l(\tilde c_r))$

Donc σ conj à $\tilde\sigma$ □

On va donc montrer que si $T_\sigma \sim T_{\tilde\sigma}$, alors $n_k = \tilde n_k$, $\forall k \geq 0$.

Soit $e_1, \dots, e_n$ base canonique de K^n. $\forall i$, $T_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$. Donc T_σ agit sur $\{e_1, \dots, e_n\}$ transitivement.
les orbites de cette action sont données par les cycles c_i, on en a r. et les points fixes. On en a n_1.

Soit $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in K^n$. $T_\sigma(v) = v \Leftrightarrow v_i = v_{\sigma(i)}$, $\forall i$
$\Leftrightarrow$ les coeffs de v sont identiques sur chaque orbite de l'action de T_σ sur $\{e_1, \dots, e_n\}$.

Donc $\dim(\text{Ker}(T_\sigma - I_n)) = r + n_1$, avec $n_1 = n - \sum l(c_i)$, $\tilde n_1 = n - \sum l(\tilde c_i)$.

On a $A \in Gl_n(K)$ tq $A T_\sigma A^{-1} = T_{\tilde\sigma} \Rightarrow A(T_\sigma - I_n)A^{-1} = T_{\tilde\sigma} - I_n$ et $A(T_\sigma^k)A^{-1} = T_{\tilde\sigma}^k$. Donc $\forall k \geq 1$, $T_\sigma^k - I_n \sim T_{\tilde\sigma}^k - I_n$.

Donc $\forall k \geq 1$, $\dim(\text{ker}(T_\sigma^k - I_n)) = \dim(\text{ker}(T_{\tilde\sigma}^k - I_n))$.
$\dim(\text{ker}(T_\sigma^k - I_n))$ = nb de cycles de σ^k à supp ≠ et pts fixes ; $\dim(\text{ker}(T_{\tilde\sigma}^k - I_n))$ = nb de cycles de $\tilde\sigma^k$ à supp ≠ et pts fixes.

On a $\sigma^k = c_1^k \circ \dots \circ c_r^k$ car les c_i sont à support disjoint.

Soit c un cycle de longueur ℓ. Soit $k \geq 1$ et $d = \text{pgcd}(\ell, k)$.

Alors c^k est un produit de d cycles de longueur $\frac{\ell}{d}$.

Donc σ^k possède $\sum_{u=1}^{n} n_u \times \text{pgcd}(k, u)$ cycles et points fixes.

~~Chapter 2~~

~~Représentations linéaires des groupes finis~~

Donc, $\forall 1 \leq k \leq n$, $\sum_{u=1}^{n} \text{pgcd}(k,u)\, n_u = \sum_{u=1}^{n} \text{pgcd}(k,u)\, \tilde{n}_u$.

Posons $M = (a_{ij})_{ij}$ $a_{ij} = \text{pgcd}(i,j)$. Alors $M\begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix} = M\begin{pmatrix} \tilde{n}_1 \\ \vdots \\ \tilde{n}_n \end{pmatrix}$, $M \in M_n(\mathbb{Q})$.

Montrons que $M \in Gl_n(\mathbb{Q})$.

Pour cela, posons

~~Soit~~ $D = \text{diag}(\varphi(1), \dots, \varphi(n))$, φ l'indicatrice d'Euler. D est inversible dans $M_n(\mathbb{Q})$

$A = (b_{ij})$ $b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } j \mid i \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$ A est triangulaire supérieure, avec ~~des~~ $b_{ii} = 1$, donc inversible dans $M_n(\mathbb{Q})$.

Calculons $A D {}^tA$: $D {}^tA = (c_{ij})$, $c_{ij} = b_{ji}\varphi(i)$

$$\Rightarrow (A D {}^tA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}\, b_{j,k}\, \varphi(k) = \sum_{k \mid \text{pgcd}(i,j)} \varphi(k) = \text{pgcd}(i,j) = (M)_{i,j}.$$

Donc $A D {}^tA = M \Rightarrow M \in Gl_n(\mathbb{Q})$, et $\det(M) = \varphi(1) \dots \varphi(n)$.

Ainsi, comme M inversible, $n_k = \tilde{n}_k$ $\forall k \geq 1$, donc σ conj à $\tilde{\sigma}$ dans $\mathfrak{S}_n$. □