SO_3 et les quaternions :

Références : [Perrin 163] [Isenmann 353]

Énoncé : $SO_3(\mathbb{R}) \simeq Sp(1)/\{-1;+1\}$

Étapes :

Étape 0 : • lemme 1 : $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$

• lemme 2 : $q \in \mathbb{H}_p$ ssi $q^2 \in \mathbb{R}_-$

$q \in \mathbb{R}$ ssi $q^2 \in \mathbb{R}_+$

• lemme 3 : $Sp(1)$ est connexe par arcs.

Étape 1 : $S : Sp(1) \longrightarrow S(\mathbb{H})$ est un

$$u \longmapsto S_u : q \in \mathbb{H} \longmapsto uqu^{-1} \in \mathbb{H}$$

morphisme de groupes (action par conjugaison)

de noyau $\{-1;+1\}$. $\forall u$, S_u est linéaire et bijective (S_u "$\in$" $GL_4(\mathbb{R})$)

Étape 2 : $\forall q \in \mathbb{H}_p$, $S_u(q) \in \mathbb{H}_p$ donc on considère

$s_u = S_u|_{\mathbb{H}_p}$ et $s : u \in Sp(1) \longmapsto s_u \in S(\mathbb{H}_p)$

Étape 3 : $\forall q \in \mathbb{H}_p$, $\forall u \in Sp(1)$, $N(s_u(q)) = N(q)$

Donc comme on peut mq N est une norme euclidienne

$\mathbb{H}_p$ est alors un espace euclidien, et $s_u \in O(\mathbb{H}_p)$

Étape 4 : $s(Sp(1)) = \{1\}$ (continuité de $\det \circ s$ et $Sp(1)$ conn.)

Étape 5 : Mq s est surjective, i.e. tous les éléments de $SO_3(\mathbb{R})$ sont atteints ($SO_3(\mathbb{R})$ engendré par les retournem^{ts})

SO$_3$(IR) et les quaternions :

<u>Référence</u> : Isenmann p.354

Énoncé : $SO_3(\mathbb{R}) \simeq Sp(1) / \{-1;1\}$

<u>Les quaternions</u> :

- $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par $(1;i;j;k)$
où $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$; $jk = i$; $ik = -j$
- (⚠ elle n'est pas commutative) $\forall x \in \mathbb{H}$, x s'écrit de manière unique $x = a + bi + cj + dk$ $(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$
- $N(q)^2 = q\bar{q} = (a+ib+jc+kd)(a-ib-jc-kd) = a^2+b^2+c^2+d^2$

<u>Démonstration</u> :

Lemme 1 : $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$

Soit $q \in Z(\mathbb{H})$, $\forall x \in \mathbb{H}$, $qx = xq$.

On écrit sous forme matricielle $q = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$

$\forall (a;b) \in \mathbb{C}^2$,

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - \beta\bar{b} & \alpha b + \bar{a}\beta \\ -a\bar{\beta} - \bar{b}\bar{\alpha} & -\bar{\beta}b + \bar{\alpha}\bar{a} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a - \bar{\beta} b & \beta a + \bar{\alpha} b \\ -\alpha\bar{b} - \bar{\beta}\bar{a} & -\bar{b}\beta + \bar{a}\bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

ssi $\forall (a;b) \in \mathbb{C}^2$ $\beta\bar{b} = \bar{\beta}b$ et $\alpha b + \bar{a}\beta = a\beta + \bar{\alpha}b$

ssi $\beta = 0$ et $\alpha = \bar{\alpha}$ ssi $q = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ i.e. $q \in \mathbb{R}$.

On note alors $Z(\mathbb{H}) \cap Sp(1) = \{-1;1\}$

Lemme 2 : $Sp(1)$ est connexe par arcs.

On a une identification entre $\mathbb{H}$ et $\mathbb{R}^4$.

Ainsi, $G = \{q \in \mathbb{H},\ N(q) = 1\} = \{(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4 \mid a^2+b^2+c^2+d^2=1\}$

Mq S^3 est connexe par arcs. En fait, plus général^t :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, S^{n-1}, sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.

Soient $(x;y) \in S^{n-1}$,

- Si $0 \notin [x;y]$, alors $\forall t \in [0;1]\ \|tx+(1-t)y\| \neq 0$ et on pose $\varphi : t \in [0;1] \longmapsto \dfrac{tx+(1-t)y}{\|tx+(1-t)y\|}$ qui est continue et telle que $\varphi(0) = y$, $\varphi(1) = x$ et à val. dans S^{n-1}.

- Si $0 \in [x;y]$, on considère $z \in S^{n-1}$ $z \neq x$, $z \neq y$ et on a alors $0 \notin [x;z]$, $0 \notin [y;z]$

On considère $\varphi_1 : [0;1] \longmapsto S^{n-1}$
$$t \longmapsto \frac{tz+(1-t)x}{\|tz+(1-t)x\|}$$

et $\varphi_2 : [0;1] \longmapsto S^{n-1}$
$$t \longmapsto \frac{ty+(1-t)z}{\|ty+(1-t)z\|}$$

qui sont deux applications continues tq $\varphi_1(1) = \varphi_2(0)$

On pose alors $\varphi : t \in [0;1] \longmapsto \begin{cases} \varphi_1(2t) \text{ si } t < 1/2 \\ \varphi_2(2t-1) \text{ si } t \geqslant 1/2 \end{cases}$

Finalement $\forall (x;y) \in S^{n-1}$, $\exists \varphi : [0;1] \mapsto S^{n-1}$ continue telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$. S^{n-1} est connexe par arcs.

L'application $\Psi : (a;b;c;d) \mapsto a + ib + jc + kd$ est linéaire donc continue donc $\Psi(S^{n-1}) = Sp(1)$ est connexe par arcs. $\boxtimes$

Lemme 3 [admis] : $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements (i.e. les applications de la forme

$$r_v : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$z \longmapsto 2\frac{\langle z ; v \rangle}{\|v\|^2} v - z \quad \text{où } v \in \mathbb{R}^3)$$

Théorème : $SO_3(\mathbb{R}) \simeq Sp(1) / \{-1;1\}$

Idée : paramétriser les éléments de $SO_3(\mathbb{R})$ par $Sp(1)$ comme on avait paramétrisé $SO_2(\mathbb{R})$ par les nombres complexes de module 1.

On considère donc l'action de $Sp(1)$ sur $\mathbb{H}$ par conjugaison. $(Sp(1), \times)$ est bien un groupe, le groupe des quaternions de module 1.

On considère l'action par conjugaison de $Sp(1)$ sur $\mathbb{H}$:

$$S : Sp(1) \longrightarrow S(\mathbb{H})$$
$$u \longmapsto S_u : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}, \quad q \longmapsto uqu^{-1}$$

qui est donc un morphisme de groupes.

comme $\mathbb{H}$ est non-commutatif cette action est non-triviale.

$\forall u \in Sp(1)$, $S_u : q \in \mathbb{H} \longmapsto uqu^{-1}$ est linéaire et bijective

Donc $S : Sp(1) \longmapsto GL_4(\mathbb{R})$

- $\ker(S) = \{-1;1\}$ En effet si $u \in \ker(S)$ alors $S_u = id$ et $\forall q \in \mathbb{H}$ $S_u(q) = q$ donc $\forall q \in \mathbb{H}$ $uqu^{-1} = q$ donc $\forall q \in \mathbb{H}$ $uq = qu$ donc $u \in Z(\mathbb{H})$.
  Or par le lemme 1, $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ donc $u \in Sp(1) \cap \mathbb{R} = \{\pm 1\}$
- Remarque, $\forall u \in Sp(1)$, $S_u|_{\mathbb{R}} = id_{\mathbb{R}}$
- Soit $u \in Sp(1)$, $\forall q \in \mathbb{H}$, $N(S_u(q)) = N(uqu^{-1}) = N(u)N(q)N(u^{-1})$
  $= N(q)$
  car $u \in Sp(1)$ donc $N(u) = N(u^{-1}) = 1$.

Donc si on muni $\mathbb{H}$ du produit scalaire associé à la norme N, $\mathbb{H}$ est euclidien et $\forall u \in Sp(1)$, $S_u \in O(\mathbb{H}) \simeq O(\mathbb{R}^4)$.

- $\forall u \in Sp(1)$, $\forall q \in \mathbb{H}_p$, $S_u(q)^2 = uq^2u^{-1} = q^2 \in \mathbb{R}_-$
  donc $S_u(q) \in \mathbb{H}_p$.
  $\left(\begin{array}{l}\text{car } q \in \mathbb{H}_p \Rightarrow q^2 \in \mathbb{R}_- \\ \Rightarrow q^2 \in Z(\mathbb{H})\end{array}\right)$
- On peut alors définir $\forall u \in Sp(1)$ $s_u = S_u|_{\mathbb{H}_p}$
  s_u est linéaire et bijective, $s_u \in O(\mathbb{H}_p) \simeq O(\mathbb{R}^3)$ et son noyau est $\{-1;1\}$
- $\forall u \in Sp(1)$, $Mat_{can}(s_u)$ est polynomiale en

$(a;b;c;d) \in \mathbb{R}^4$ tq $u = a + ib + jc + kd$.

Donc $s : u \mapsto s_u$ est continue et on peut la voir comme un morphisme $s : Sp(1) \to O_3(\mathbb{R})$

Comme dét est aussi une application continue,

$\det : O_3(\mathbb{R}) \to \{-1;1\}$

donc $\det \circ s : Sp(1) \to \{-1;1\}$ est continue. Comme $Sp(1)$ est connexe (lemme 2), alors $(\det \circ s)(Sp(1))$ est connexe. Comme $\{-1;+1\}$ n'est pas connexe, $(\det \circ s)(Sp(1)) = \{1\}$ ou $(\det \circ s)(Sp(1)) = \{-1\}$. Or $s_1 = id$ donc $(\det \circ s)(1) = 1$ donc $(\det \circ s)(Sp(1)) = \{1\}$.

Donc $s(Sp(1)) \subset SO_3(\mathbb{R})$.

Il reste à mq $SO_3(\mathbb{R}) \subset s(Sp(1))$

les retournements engendrent $SO_3(\mathbb{R})$, mq ils sont tous atteints.

Soit $r_v \in SO_3(\mathbb{R})$ un retournement d'axe $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

On l'identifie au quaternion $v = v_1 i + v_2 j + v_3 k \in \mathbb{H}p$ et on suppose $N(v) = 1$. ($r_v = r_{\lambda v}$ correspondent au même retournement pour $\lambda \neq 0$)

On a alors $v \in \mathbb{H}p \cap Sp(1)$.

En particulier $v\bar{v} = 1$ et $\bar{v} = -v$

donc $v^2 = -1$.

Et $s_v : q \in \mathbb{H}_p \mapsto vqv^{-1} = vq\bar{v} = -vqv$

$(s_v)^2 : q \in \mathbb{H}_p \longmapsto -v(-vqv)v = q = id_{\mathbb{H}_p}$

Or $s_v \in SO_3(\mathbb{R})$ donc s_v est une symétrie orthogonale (+)

[Rom 730]

Montrons que s_v est un retournement, i.e. qu'il laisse fixe une droite.

Soit $\lambda \in Sp(s_v)$, x vp non-nul associé,

$s_v(x) \circ s_v(x) = x$ donc $\lambda^2 = 1$, $\lambda = \pm 1$.

Comme $\det(s_v) = 1$, on a soit -1 vp deux fois, 1 vp une fois soit $s_v = id$.

$\ker(s) = \{\pm 1\}$ donc $v \notin \ker(s)$ donc $s_v \neq id$.

Donc s_v a pour vp -1 de multiplicité 2 et 1 de multiplicité 1.

Donc s_v est un retournement. Or $s_v(v) = vvv^{-1} = v$ donc s_v laisse fixe $\langle v \rangle$, $s_v = r_v$.

Ainsi $\forall r_v \in SO_3(\mathbb{R})$, $r_v \in s(Sp(1))$

Donc $s : Sp(1) \to SO_3(\mathbb{R})$ est surjective. En quotientant par le noyau on a $Sp(1)/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.