Théorème de Riesz-Fischer :

Référence : Briane-Pagès

Énoncé : Théorème a) $\forall p \in [1;+\infty[$, $(L^p_{\mathbb{K}}(\mu); \|\cdot\|_p)$ est complet.

(b) Soient $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Si $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$, il existe une suite extraite $(f_{\varphi(n)})$ et $g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ telles que $|f_{\varphi(n)}| \leq g$ μp.p. et $f_{\varphi(n)} \xrightarrow{\mu p.p.} f$

Lemme : Inégalité de Minkowski généralisée. Soit $f_n : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}_+$, $n \geq 1$ une suite de fonctions positives. Alors pour tout $p \in [1;+\infty[$ $\|\sum_{n\geq 1} f_n\|_p \leq \sum_{n\geq 1} \|f_n\|_p \leq +\infty$.

Lemme : Soit $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$ ev normé. $(E, \|\cdot\|)$ est complet ssi toute série absolument convergente est convergente.

Étapes :

(E1) Minkowski et Minkowski généralisée

(E2) E complet ssi toute série abs cv converge

(E3) prendre une série abs cv de L^p et mq elle cv dans L^p

(E1) Inégalité de Minkowski et Minkowski généralisée:

Soit $p \in [1;+\infty[$, soit $q \in [1;+\infty[$ tq $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$

$$|f+g|^p = |f+g||f+g|^{p-1} \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1}$$

Donc en intégrant,

$$\int_X |f+g|^p d\mu \leq \int_X |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1} d\mu$$

Donc par Hölder,

$$\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p \left(\int_X (|f+g|^{p-1})^q d\mu\right)^{1/q} + \|g\|_p \left(\int_X (|f+g|^{p-1})^q d\mu\right)^{1/q}$$

Donc $\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1-1/p} + \|g\|_p \left(\int_X |f+g|^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}$

Donc $\|f+g\|_p^p \leq \|f\|_p \|f+g\|_p^{p-1} + \|g\|_p \|f+g\|_p^{p-1}$

Donc si $\|f+g\|_p \neq 0$ on divise par $\|f+g\|_p^{p-1}$ et on obtient

$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$. Ceci reste vrai si $\|f+g\|_p = 0$

▷ <u>Généralisée</u>: Soit $f_n : (X, \mathcal{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}_+}$, $n \geq 1$ une suite de fonctions positives. Alors pour tout $p \in [1;+\infty[$,

$$\left\|\sum_{n\geq 1} f_n\right\|_p \leq \sum_{n\geq 1} \|f_n\|_p \leq +\infty$$

$\|f_1+f_2\|_p \leq \|f_1\|_p + \|f_2\|_p$ (si $f_1, f_2 \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ c'est Minkowski, sinon c'est évident)

Ainsi par récurrence

$$\forall m \in \mathbb{N}, \left\|\sum_{k=1}^{m} f_k\right\|_p \leq \sum_{k=1}^{m} \|f_k\|_p \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \|f_k\|_p$$

et $\left(\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)\right)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de fonctions positives donc

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)^p \leq \left(\sum_{k=0}^{n+1} f_k\right)^p$$

donc $\left(\left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)^p\right)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de fonction positives. Donc par le thm de cvgce monotone :

$$\int_X \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\right)^p d\mu = \lim_{n\to+\infty} \left(\int_X \left(\sum_{k=0}^{n} f_k\right)^p d\mu\right) \quad (*)$$

or par inégalité triangulaire, $\|\sum_{k=0}^{n} f_k\|_p \leq \sum_{k=0}^{n} \|f_k\|_p$

donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\|\sum_{k=0}^{n} f_k\|_p\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_p$

donc par $(*)$ $\quad \|\sum_{k=0}^{+\infty} f_k\|_p \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \|f_k\|_p \leq +\infty$

(E2) $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn complet, soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série de E absolument convergente

Mq $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\geq 0}$ est de Cauchy

Soit $\varepsilon > 0$, soient $p, q \in \mathbb{N}$ $\quad p \leq q$

$$\left\|\sum_{k=0}^{q} u_k - \sum_{k=0}^{p} u_k\right\| = \left\|\sum_{k=p+1}^{q} u_k\right\| \leq \underbrace{\sum_{k=p+1}^{q} \|u_k\|}$$

or $\sum_{k\geq 0} \|u_k\|$ converge donc $\qquad = \sum_{k=0}^{q} \|u_k\| - \sum_{k=0}^{p} \|u_k\|$

$\left(\sum_{k=0}^{n} \|u_k\|\right)_{n\geq 0}$ est de Cauchy donc $\exists N \in \mathbb{N}$, si $p \geq N$ et

$q \geq N$ alors
$$\sum_{k=0}^{q} \|u_k\| - \sum_{k=0}^{p} \|u_k\| \leq \varepsilon$$
donc $\left\| \sum_{k=0}^{q} u_k - \sum_{k=0}^{p} u_k \right\| \leq \varepsilon$

donc $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k \right)_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans E complet donc elle converge.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que toute série abs cv soit cv. Mq E est complet.

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy de E
$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N_k \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq N_k \Rightarrow \forall p \in \mathbb{N}$
$\|u_{n+p} - u_n\| \leq \frac{1}{2^k})$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, \exists N_k \in \mathbb{N},\ \forall p \in \mathbb{N}\ \ \|u_{N_k+p} - u_{N_k}\| \leq \frac{1}{2^k}$
On définit alors par récurrence
$(\varphi(k))_{k \in \mathbb{N}}$ une suite strictement croissante tq
$\forall k \in \mathbb{N}\ \ \varphi(k+1) = \max(\varphi(k)+1\,;\, N_{k+1})$
Et on pose $\forall k \in \mathbb{N}\ \ v_k = u_{\varphi(k+1)} - u_{\varphi(k)}$
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, \|v_n\| = \|u_{\varphi(n+1)} - u_{\varphi(n)}\| \leq \frac{1}{2^n}$. Or $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ cv.
Donc par comparaison $\sum \|v_n\|$ converge donc $\sum v_n$ cv par hypothèse donc $(u_{\varphi(n)} - u_{\varphi(0)})_n$ converge donc

$(u_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge.

Ainsi $(u_n)_{n\geq 0}$ a une valeur d'adhérence dans E. Comme elle est de Cauchy, elle converge. E est donc complet.

(E3) Thm de Riesz-Fischer :

on va mq $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est complet en mq dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ toute série absolument convergente est convergente.

Soit $\sum_{n\geq 0} f_n$ une série absolument convergente de $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Par l'étape 1, $\| \sum_{n\geq 0} |f_n| \|_p \leq \sum_{n\geq 0} \|f_n\|_p < +\infty$

Donc $\| \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| \|_p < +\infty$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| \in L^p$ Donc elle est finie presque partout, ie pp tout $x \in X$, $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$.

Donc $\sum_{n\geq 0} f_n(x)$ converge absolument dans $\mathbb{K}$ donc elle est convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) < +\infty$ pp tout $x \in X$.

Mq $\sum_{n=0}^{N} f_n \xrightarrow[N\to+\infty]{\|\cdot\|_p} U : x \longmapsto \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) & \text{si } |\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)| < +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Comme $\{x \in X \mid |\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)| = +\infty\}$ est de mesure nulle,

μ-pp $|U - \sum_{n=0}^{N} f_n| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |f_n|$

Donc $\|U - \sum_{n=0}^{N} f_n\|_p \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} \|f_n\|_p \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$ donc $U \xrightarrow{\|\cdot\|_p} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge dans $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ vers U μ pp

Donc $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge dans $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ vers U.

↑ classes d'équivalence

(E4) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}^p$ et $f \in \mathcal{L}^p$.
On suppose $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} f$. Alors en particulier $(f_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans L^p donc comme à l'(E2) il existe une sous-suite $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ telle que

$$\sum_{n\geq 0} \|f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}\|_p \quad \text{converge dans } \mathbb{R}$$

Donc $\sum_{n\geq 0} f_{\varphi(n+1)} - f_{\varphi(n)}$ converge μ pp. car L^p est

complet donc $(f_{\varphi(n)})$ converge μ pp.

Par unicité de la limite, $\lim_{n\to+\infty} (f_{\varphi(n)}) = f$.

Complément :

Soit $f : (X ; \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}_+}$ $\underset{\|f\|_\infty}{\overset{}{\text{supess}\{f\}}} := \inf\{M > 0 \mid \mu(f > M) = 0\}$.

$\mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) = \{f : (X ; \mathcal{A}) \to \mathbb{K} \mid \|f\|_\infty < +\infty\}$

$L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) = \mathcal{L}^\infty_{\mathbb{K}}(\mu) / \{\|\cdot\|_\infty = 0\}$

$(L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_\infty)$ est complet :

Soit (f_n) une suite de Cauchy de $(L^\infty_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_\infty)$

On pose $A_\infty := \left(\bigcup_{n \geq 1} \{|f_n| > \|f_n\|_\infty\}\right) \cup \left(\bigcup_{n,m} \{|f_n - f_m| > \|f_n - f_m\|_\infty\}\right)$

$\mu(A_\infty) = 0$

On note $A_f = C_E(A_\infty)$, c'est alors l'ensemble de mesure 1 sur lequel f_n et $f_n - f_m$ sont finies.

On pose $g_n = f_n \times \mathbb{1}_{A_f}$ qui est donc bornée.

Ainsi, $|g_n - g_m| = |f_n - f_m| \mathbb{1}_{A_f} \leq \|f_n - f_m\|_\infty$

donc $\|g_n - g_m\|_{sup} \leq \|f_n - f_m\|_\infty$

Donc (g_n) est de Cauchy dans $(B(X ; \mathbb{K}), \|\cdot\|_{sup})$

Donc $g_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{sup}} g \in B(X ; \mathbb{K})$

Donc en particulier on a cvs $g_n(x) \to g(x)$

g est mesurable comme limite de f° mesurables

et $\|f_n - g\|_\infty \leq \underbrace{\|f_n - g_n\|_\infty}_{= \|(f_n - g_n)\mathbb{1}_{A_f}\|_\infty = 0} + \|g_n - g\|_\infty \leq \|g_n - g\|_\infty = \|g_n - g\|_{sup} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$