

Équation de Ricatti:

Référence: [Goudon. P 393]

Énoncé: les solutions maximales réelles de l'E.D.

$$(R): y' + y + y^2 + 1 = 0$$

sont de la forme $t \mapsto -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\cos(\sqrt{3}t + \theta)}{1 + \sin(\sqrt{3}t + \theta)}$
définies sur des intervalles de longueur $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Étapes:

- (E1) C.L.: existence et unicité de solutions max. sur $I \subset \mathbb{R}$
- (E2) Chercher une solution particulière pour se débarrasser du $+1$ et se ramener à une équation de Bernoulli.
- (E3) Mq une solution non-nulle ne s'annule jamais et en faisant + chgt de variable, se ramener à une edo.
- (E4) Remonter et chercher les solutions réelles.
- (E5) Synthèse

(E0) Existence de solutions :

$$y' = -y - y^2 - 1 = f(y)$$

où $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est $\mathcal{C}^1$ donc localement

$$x \mapsto -x - x^2 - 1$$

Lipschitzienne. Donc $\forall (t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une

unique solution maximale $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $y(t_0) = y_0$.

(E1) on cherche une solution particulière et on reformule

on cherche y sous la forme $y: t \in \mathbb{R} \mapsto a \in \mathbb{C}$

y est solution de R ssi $a^2 + a + 1 = 0$

$$\text{ssi } a = j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$$

(R) n'a donc pas de solution constante réelle.

on cherche donc les solutions complexes sous la

$$\text{forme } z = y - j$$

comme $t \mapsto j$ vérifie (R) sur $\mathbb{R}$, on cherche alors

z vérifiant :

$$z' = -z - j - z^2 - j^2 + 2zj - 1$$

Donc z vérifie

$$(R_2) \quad z' + (1 + 2j)z + z^2 = 0$$

qui est une équation de Bernoulli.

(E2) Reformulation à nouveau puis analyse

$g: z \in \mathbb{C} \mapsto -(1+2j)z - z^2$ est $\mathcal{C}^1$ donc localement lipschitzienne sur $\mathbb{C}$ donc $\forall (t_0, z_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$

il existe une unique solution maximale

$z: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que z vérifie (E2) sur I ,
et I est un ouvert de $\mathbb{R}$.

La fonction $N \equiv 0$ est solution de l'équation (E2) sur $\mathbb{R}$.

Bonc si z est solution de (E2) et $\exists t_0 \in \mathbb{R}, z(t_0) = 0$,
alors $z \equiv N \equiv 0$ par unicité.

Bonc si z est une solution non nulle de (E2), z ne s'annule pas.

Bonc on peut réécrire (E2) : et $(1+2j) = 1+2e^{i\frac{2\pi}{3}}$
 $= 1+2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$
 $= 1+2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = i\sqrt{3}$

$$\frac{z'}{z^2} + (1+2j) \frac{1}{z} + 1 = 0$$

on pose alors $h = \frac{1}{z}$ on a $h' = -\frac{z'}{z^2}$

et donc h vérifie

$$-h' + i\sqrt{3}h + 1$$

Équation que l'on sait résoudre, dont les solutions sont de la forme

$$h: t \in I \mapsto \alpha e^{i\sqrt{3}t} + \frac{i}{\sqrt{3}} \quad \text{avec } \alpha \in \mathbb{C}, I \subset \mathbb{R}$$

Donc on remonte, et si z n'est pas la fonction nulle :

$$z: t \in I \mapsto \frac{1}{\alpha e^{i\sqrt{3}t} + \frac{i}{\sqrt{3}}}$$

$$\text{donc } y: t \in I \rightarrow \frac{1}{\alpha e^{i\sqrt{3}t} + \frac{i}{\sqrt{3}}} + j$$

Mais on cherchait les fonctions à valeurs réelles.

On cherche donc la valeur de $\alpha \in \mathbb{C}$ telle que $\forall t \in I$,

$$\operatorname{Im}(y(t)) = 0$$

(E3) Solutions réelles:

$$\text{Soit } t \in I, \operatorname{Im}(y(t)) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha e^{i\sqrt{3}t} + \frac{i}{\sqrt{3}}} + j\right)$$

$$\text{Donc on veut } 0 = \frac{-(\operatorname{Im}(\alpha e^{i\sqrt{3}t}) + \frac{1}{\sqrt{3}})}{|\alpha e^{i\sqrt{3}t} + \frac{i}{\sqrt{3}}|^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Donc } |\alpha e^{i\sqrt{3}t} + \frac{i}{\sqrt{3}}|^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{Im}(\alpha e^{i\sqrt{3}t}) + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{or } |\alpha e^{i\sqrt{3}t} + \frac{i}{\sqrt{3}}|^2 = \frac{\operatorname{Re}(\alpha e^{i\sqrt{3}t})^2 + \operatorname{Im}(\alpha e^{i\sqrt{3}t})^2}{+ \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Im}(\alpha e^{i\sqrt{3}t}) + \frac{1}{3}} = |\alpha|^2$$

$$= |\alpha|^2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Im}(\alpha e^{i\sqrt{3}t}) + \frac{1}{3}$$

Donc on cherche $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que

$$\left(|\alpha|^2 + \frac{2 \operatorname{Im}(\alpha e^{i\sqrt{3}t})}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \operatorname{Im}(\alpha e^{i\sqrt{3}t}) + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Donc } |\alpha|^2 + \frac{2 \operatorname{Im}(\alpha e^{i\sqrt{3}t})}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} = \frac{2 \operatorname{Im}(\alpha e^{i\sqrt{3}t})}{\sqrt{3}} + \frac{2}{3}$$

$$\text{Donc } |\alpha|^2 = \frac{1}{3}$$

$$\text{Donc } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{i\theta} \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Donc } y_0: t \in I \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{e^{i(\sqrt{3}t+\theta)} + i} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{On pose } \varepsilon = \sqrt{3}t + \theta$$

$$\forall t \in I, y_0(t) = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\cos(\varepsilon) + i \sin(\varepsilon) + i}$$

$$= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} (\cos(\varepsilon) - i (\sin(\varepsilon) + 1))}{\cos(\varepsilon)^2 + \sin(\varepsilon)^2 + 2 \sin(\varepsilon) + 1}$$

$$= -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3} \cos(\varepsilon)}{2 (\sin(\varepsilon) + 1)} - i \frac{\sqrt{3} \sin(\varepsilon) + 1}{2 \sin(\varepsilon) + 1}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\cos(\sqrt{3}t + \theta)}{\sin(\sqrt{3}t + \theta) + 1}, \quad \forall \theta \in \mathbb{R}$$

Ces solutions sont alors définies sur des intervalles de longueur $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Synthèse : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, la sol. y_0 déf. sur $]-\frac{(\pi+2\theta)}{2\sqrt{3}}, \frac{3\pi+2\theta}{2\sqrt{3}}[$ sont sol. de (E) et à valeurs réelles.