

Réduction des endomorphismes normaux d'un espace euclidien:

Référence: [Grifone P290]

Énoncé: soit f un endomorphisme normal d'un espace euclidien (i.e. $f^* \circ f = f \circ f^*$). f est diagonalisable et les s.e.p. sont deux-à-deux orthogonaux. en particulier il est diagonalisable dans une b.o.n.

Lemme 1: E_{λ^+} est stable par f et f^*

Lemme 2: $f|_{E_{\lambda^+}}$ est normal

Corollaire 1: [Thm spectral] si f est symétrique réelle, A est diag. dans une b.o.n. et ses vp sont réelles

Corollaire: si A est sym (herm) il existe $P \in O(n, \mathbb{R})$

(resp. $\in U(n, \mathbb{C})$) tq. $A = P D^t P$ (resp. $A = P D \bar{P}$)

Corollaire 2: si Φ est une forme quadratique et Ψ une forme quadratique définie positive alors il existe une base dans laquelle Φ et Ψ sont diagonale.

Étapes: dans l'ordre.

(E0) On procède par récurrence sur la dimension de E . $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on pose $\mathcal{H}(n) =$ "Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace hermitien tq $\dim(E_\lambda) = n$. Alors tout endomorphisme normal de E est diagonalisable dans une b.o.n."

$n=1$: rés.

$n \geq 2$: on suppose $\mathcal{H}(k)$ vraie pour tout $k \in [1; n-1]$.

Soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$, $E_\lambda \oplus E_\lambda^\perp = E$

On cherche alors à mq $f|_{E_\lambda^\perp}$ est normal.

(E1) Lemme 1: Mq $E_\lambda^\perp$ est stable par f .

Soit $x \in E_\lambda^\perp$, soit $y \in E_\lambda$

$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f^*(y) \rangle$$

$$\text{or } f^*(f(y)) = f^*(\lambda y) = \lambda f^*(y)$$

et comme f est normal, $f(f^*(y)) = f^*(f(y)) = \lambda f^*(y)$

donc $f^*(y) \in E_\lambda$ donc $\langle x, f^*(y) \rangle = 0$

donc $\langle f(x), y \rangle = 0$ et $f(x) \in E_\lambda^\perp$.

(E2) Lemme 2: $f|_{E_\lambda^\perp}$ est normal.

(2.1) Mq $E_\lambda^\perp$ est stable par f^* .

Soit $x \in E_\lambda^\perp$, $y \in E_\lambda$.

$$\langle f^*(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = 0.$$

Donc $f^*(x) \in E_\lambda^\perp$.

(2.2) f est normal ssi $\langle f(x); f(y) \rangle = \langle f^*(x); f^*(y) \rangle$
 $\forall (x, y) \in E^2$

$\Rightarrow$ Soient $(x, y) \in E^2$

$$\begin{aligned} \langle f(x); f(y) \rangle &= \langle x; f^*(f(y)) \rangle = \langle x; f(f^*(y)) \rangle \\ &= \langle f^*(x); f^*(y) \rangle \end{aligned}$$

$\Leftarrow$ Supp $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle f(x); f(y) \rangle = \langle f^*(x); f^*(y) \rangle$

$$\text{Alors } \forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x; f^*(f(y)) \rangle = \langle x; f(f^*(y)) \rangle$$

$$\text{Donc } \forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x; f^*(f(y)) - f(f^*(y)) \rangle = 0$$

$$\text{Donc } \forall y \in E, f^*(f(y)) - f(f^*(y)) \in E^\perp = \{0\}$$

$$\text{Donc } f^* \circ f = f \circ f^*$$

Maq $f|_{E_\lambda^\perp}$ vérifie cette identité

$$\forall (x, y) \in (E_\lambda^\perp)^2$$

$$\langle f(x); f(y) \rangle = \langle f|_{E_\lambda^\perp}(x); f|_{E_\lambda^\perp}(y) \rangle$$

$$\langle f^*(x); f^*(y) \rangle = \langle f^*|_{E_\lambda^\perp}(x); f^*|_{E_\lambda^\perp}(y) \rangle$$

$$\text{or } f^*|_{E_\lambda^\perp} = (f|_{E_\lambda^\perp})^*$$

$$\text{donc } \langle f|_{E_\lambda^\perp}(x); f|_{E_\lambda^\perp}(y) \rangle = \langle (f|_{E_\lambda^\perp})^*(x); (f|_{E_\lambda^\perp})^*(y) \rangle \text{ et}$$

$f|_{E_\lambda^\perp}$ est donc normal

$$\forall (x, y) \in (E_\lambda^\perp)^2 \quad \langle f|_{E_\lambda^\perp}(x); y \rangle = \langle x; (f|_{E_\lambda^\perp})^*(y) \rangle$$

$$\text{or } \forall (x, y) \in (E_\lambda^\perp)^2 \quad \langle f(x); y \rangle = \langle x; f^*(y) \rangle$$

$$\text{Donc } (f|_{E_\lambda^\perp})^* = f^*|_{E_\lambda^\perp}$$

(E3) Ainsi $f|_{E_{\lambda}^{\perp}}$ est un endomorphisme normal de $E_{\lambda}^{\perp}$ et de dimension $m \leq n-1$.

Donc $f|_{E_{\lambda}^{\perp}}$ est diagonalisable dans une b.o.n.
 $\exists \mathcal{C} = (e_1, \dots, e_m)$ tq $\mathcal{C}$ est une b.o.n. et $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f|_{E_{\lambda}^{\perp}})$ est diagonale.

Soit B une b.o.n. de E_{λ} , $B = (e_{m+1}, \dots, e_n)$.

Alors $B \cup \mathcal{C}$ est une b.o.n. de E et

$\text{Mat}_{B \cup \mathcal{C}}(f)$ est diagonale.

Corollaire 1: Si f est symétrique ou hermitienne, ses valeurs propres sont réelles.

f sym/herm $\Rightarrow f^* = f$ pour le produit scalaire/herm
et si $\lambda \in \text{Sp}(f)$, $x \in E \setminus \{0\}$ un $\overline{v}$ associé alors

$$\langle f(x), x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \overline{\lambda} \|x\|^2$$

"

$$\langle x, f^*(x) \rangle = \langle x, f(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

Donc $\lambda = \overline{\lambda}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Donc f est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et $\exists P \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$

tq $\text{Mat}_{\text{can}}(f) = P D^t \overline{P}$ avec D diagonale réelle.

Cas réel:

Corollaire: Si φ est une forme hermitienne définie positive, ψ une forme quadratique. Alors φ et ψ se diagonalisent dans une même base.

⚠ Lemme: Si B et B' sont deux bases de E .

Alors si on note $P = P_{B \rightarrow B'}$, si φ est une forme bilinéaire, $\text{Mat}_B(\varphi) = M$ est tq si $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$

et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ coord dans B .

alors $\varphi(x, y) = {}^t \bar{X} M Y$. $M = (\varphi(e_i, e_j))_{i,j}$.

Alors si $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est une autre base,

$N = (\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j))_{i,j}$, alors en notant $P = P_{B \rightarrow \mathcal{C}}$

et X' et Y' les coord de x et y dans $\mathcal{C}$,

$${}^t (\bar{P} X') M (P Y) = \varphi(x, y)$$

$$= {}^t \bar{X}' (\underbrace{{}^t \bar{P} M P}) Y$$

$$= (\varphi(\varepsilon_i, \varepsilon_j))_{i,j}$$

$$\text{Donc } N = {}^t \bar{P} M P$$

Donc si φ est une forme hermitienne définie positive, il existe une base orthonormée pour φ .

En notant $M = \text{Mat}_{\text{can}}(\varphi)$, $\exists P \in \text{Glu}(\mathbb{C})$, matrice de

Complément: Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien.

Si $\{e_i\}_{i \in [1, n]}$ est une b.o.n., $\text{Mat}_{\text{can}}(e_i) = M$

$${}^t M M = I_n.$$

$$M = \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \quad {}^t M M = \begin{pmatrix} {}^t e_1 & & \\ & \ddots & \\ & & {}^t e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 & \dots & e_n \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & & \\ & \ddots & \\ & & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix} = I_n.$$

$\triangleright$ $\{e_i\}$ et $\{f_i\}$ sont deux b.o.n. Alors

$$P_{\{e_i\} \rightarrow \{f_i\}} \in \text{Gen}(\mathbb{R})$$

$$P_{\{e_i\} \rightarrow \{f_i\}} = \text{Mat}_{\{e_i\}} \begin{pmatrix} f_1 & \dots & f_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f_1^1 & & f_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n^1 & & f_n^n \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\{e_i\}}(\varphi) \text{ où } \varphi(e_i) = f_i.$$

Or φ est orthogonal ssi il transforme toute b.o.n. en b.o.n. Pour cela il suffit qu'il existe une b.o.n. qui, par φ , est transformée en b.o.n.

$$\Rightarrow \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle \stackrel{\varphi \text{ ortho.}}{=} \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} \text{ donc } (\varphi(e_i))_i \text{ b.o.n.}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ supposons que $(\varphi(e_i))_i$ et $(e_i)_i$ soient deux b.o.n.

Lemme : φ est orthogonal ssi $\langle x, y \rangle = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle$

$$\boxed{\Rightarrow} \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, \varphi^*(\varphi(y)) \rangle = \langle x, y \rangle \quad @$$

$$\boxed{\Leftarrow} \forall (x, y) \in E^2, \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle x, \underbrace{\varphi^*(\varphi(y)) - y}_{\in E^\perp} \rangle = 0$$

$$E^\perp = \{0\} \quad @$$

$$\text{soient } (x, y) \in E^2, \quad x = \sum_{i=1}^m x_i e_i \quad y = \sum_{i=1}^m y_i e_i$$

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^m x_i \varphi(e_i), \sum_{i=1}^m y_i \varphi(e_i) \right\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m [x_i y_j \langle \varphi(e_i), \varphi(e_j) \rangle]$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i y_j \delta_{i,j}$$

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^m x_i e_i, \sum_{j=1}^m y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m x_i y_j \delta_{i,j} = \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle \end{aligned}$$