

Théorème de projection sur un convexe fermé:

Référence: [Gourdon - Analyse 427] [Madière 76]

Énoncé: Soit $(H; \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, $C \subset H$ un convexe. $\forall x \in H, \exists ! y \in C$ tq $d(x; C) = d(x; y)$.

On note $p_C(x)$ ce point et il est caractérisé par

$$\forall z \in C \quad \langle z - p_C(x), x - p_C(x) \rangle \leq 0 \quad (\text{angle obtus}) \quad (*)$$

De plus $p_C: x \in H \mapsto p_C(x)$ est 1-Lipschitzienne

Étapes:

Étape 1: Mq $\exists (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy tq $\|x - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d(x; C)$ + conclure avec la complétude.

Étape 2: Unicité

Étape 3: $p_C(x)$ vérifie $(*)$

Étape 4: y qui vérifie $(*)$ est $y = p_C(x)$.

Étape 5: Caractérisation $\Rightarrow$ Lipschitz.

Théorème de projection sur un convexe fermé

[Gourdon Analyse P427] [Madelie 76]

Soit H un espace de Hilbert (dim $\neq \infty$ a priori)

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ produit scalaire sur H et $\|\cdot\|$ norme associée

Soit $C \subset H$ un convexe fermé, $x \in H$.

i) il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x; C)$
 $= \inf_{z \in C} (d(x; z))$. On appelle y projection orthogonale de x sur C et on le note $p_C(x)$.

ii) $p_C(x)$ est caractérisé par $\forall z \in C \langle z - p_C(x); x - p_C(x) \rangle \leq 0$

iii) [Madelie P76] $p_C: H \rightarrow C$ est 1-lipschitzienne.
 $x \mapsto p_C(x)$

Démo: Soit $x \in H$. On pose $d = d(x; C) = \inf_{y \in C} (\|x - y\|)$.

On peut alors prendre $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de C telle que

$$\|x - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d. \quad \boxed{1}$$

Mq $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$,

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geq n, |\|x - y_n\| - d| \leq \varepsilon$.

On peut car $\|x - y_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} d$.

Soit $p \in \mathbb{N}$, on a par l'identité du parallélogramme:

$$\begin{aligned} & \|y_{n+p} - x - (y_{n+p} - x)\|^2 + \|y_{n+p} - x + (y_{n+p} - x)\|^2 \\ &= 2 (\|y_{n+p} - x\|^2 + \|y_n - x\|^2) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|y_{n+p} - y_n\|^2 + 4 \left\| \frac{1}{2} (y_{n+p} + y_n) - x \right\|^2 = 2 (\|y_{n+p} - x\|^2 + \|y_n - x\|^2)$$

$$\text{Donc } \|y_{n+p} - y_n\|^2 \leq 2 ((d+\varepsilon)^2 \times 2) - 4 \underbrace{\left\| \frac{1}{2} (y_{n+p} + y_n) - x \right\|^2}_{\substack{\text{EC} \\ \text{par convexité}}} \geq d^2$$

$$\text{Donc } \|y_{n+p} - y_n\|^2 \leq 4d^2 + 8d\varepsilon + 4\varepsilon^2 - 4d^2 \leq 4\varepsilon(2d + \varepsilon)$$

Donc $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Donc comme H est complet elle converge. Or (y_n) est une suite convergente de C , qui est fermé, donc elle converge vers un élément de C , y .

Ainsi, $\forall x \in H$, $\exists ! y \in C$ tq $d(x; C) = d(x; y)$.

[2] Unicité: soit $(y, y') \in C$ supposons $d(x; C) = \|x - y\|$ et $d(x; C) = \|x - y'\|$.

Mq $y = y'$ i.e. $\|y - y'\| = 0$.

$$\|x - y' + x - y\|^2 + \|x - y' - x + y\|^2 = 2(\|x - y'\|^2 + \|x - y\|^2)$$

$$\|2x - (y' + y)\|^2 + \|y - y'\|^2 = 4d^2$$

$$\text{donc } 4 \underbrace{\left\| x - \frac{y' + y}{2} \right\|^2}_{\geq d^2} + \|y - y'\|^2 = 4d^2$$

$$\text{donc } \|y - y'\|^2 = 0$$

En conclusion $y=y'$ et le projeté sur C est unique.

[3] Caractérisation:

Soit $z \in C$, on pose $z_\varepsilon = \varepsilon z + (1-\varepsilon)p_C(x) \in C$ par convexité

$$\text{Donc } \|x - z_\varepsilon\|^2 \geq \|x - p_C(x)\|^2$$

$$\text{Donc } \|x - p_C(x) + p_C(x) - z_\varepsilon\|^2 \geq \|x - p_C(x)\|^2$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \|x - p_C(x)\|^2 + 2\langle x - p_C(x), p_C(x) - z_\varepsilon \rangle + \|p_C(x) - z_\varepsilon\|^2 \\ \geq \|x - p_C(x)\|^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|p_C(x) - \varepsilon z - (1-\varepsilon)p_C(x)\|^2 - 2\langle x - p_C(x), \varepsilon z + (1-\varepsilon)p_C(x) - p_C(x) \rangle \geq 0$$

$$\text{Donc } \varepsilon^2 \|p_C(x) - z\|^2 - 2\varepsilon \langle x - p_C(x), z - p_C(x) \rangle \geq 0$$

$$\text{Donc } \varepsilon \|p_C(x) - z\|^2 - 2\langle x - p_C(x), z - p_C(x) \rangle \geq 0$$

$$\text{Donc } \langle x - p_C(x), z - p_C(x) \rangle \leq 0 \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

[4] Soit $y \in C$ tq $\forall z \in C$

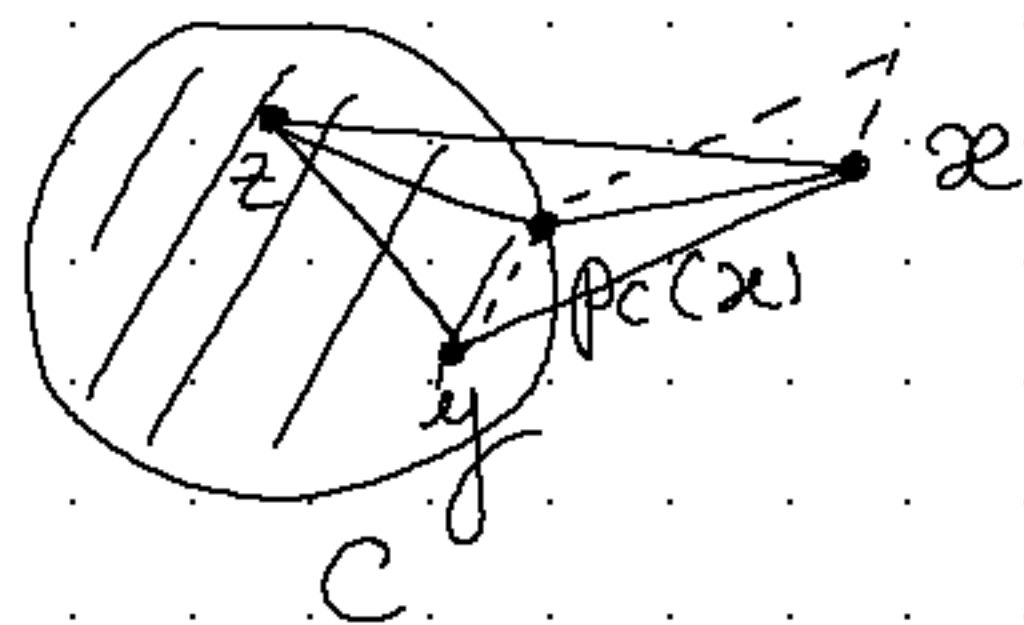
$$\langle z - y, x - y \rangle \leq 0 \text{ alors } y = p_C(x)$$

on veut mq $\forall z \in C$,

$$\|y - x\| \leq \|z - x\|$$

$$\begin{aligned} \|z - x\|^2 &= \|z - y + y - x\|^2 = \|z - y\|^2 + 2\langle z - y, y - x \rangle + \|y - x\|^2 \\ &= \|z - y\|^2 - 2\langle z - y, x - y \rangle + \|y - x\|^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\text{donc } \forall z \in C, \|z - x\|^2 \geq \|y - x\|^2 \text{ donc } y = p_C(x) \quad \square$$



[5] Mq $p_C: x \in \mathcal{H} \mapsto p_C(x)$ est 1-lipschitz :

soient $(x, y) \in \mathcal{H}$, $\forall z \in C$,

$$\langle z - p_C(x), x - p_C(x) \rangle \leq 0 \quad (1)$$

$$\langle z - p_C(y), y - p_C(y) \rangle \leq 0 \quad (2)$$

on prend dans (1) $z = p_C(y)$ dans (2) $z = p_C(x)$ et on somme :

$$\langle p_C(y) - p_C(x), x - p_C(x) + p_C(y) - y \rangle \leq 0$$

Donc

$$\|p_C(y) - p_C(x)\|^2 \leq \langle p_C(y) - p_C(x), y - x \rangle \underset{\text{c.s.}}{\leq} \|p_C(y) - p_C(x)\| \times \|y - x\|$$

si $p_C(y) \neq p_C(x)$ alors on divise par $\|p_C(y) - p_C(x)\|$

Alors $\|p_C(y) - p_C(x)\| \leq \|x - y\|$, résultat qui reste vrai

si $p_C(y) = p_C(x)$. □

Questions / commentaires de Rigat:

■ En dimension finie, a-t-on toujours $d(x; F)$ (où $x \in E$ et F est fermé) atteinte?

Oui, mais on n'a pas forcément l'unicité.

Démo: on peut passer par une suite:

$\forall n \in \mathbb{N}$ on a existence de $w_n \in F$ tq

$$d(x; w_n) \leq d(x; F) + \frac{1}{n+1}$$

on a une suite bornée dans un e.v. de dim. finie

Donc elle est dans un compact, etc...

■ contre-ex en dim. finie

$$E = (\mathcal{C}([0; 1]), \mathbb{R})$$

Si $f \in E$, on pose $\|f\| = |f(0)| + \int_0^1 |f(t)| dt$

$$F = \{f \in E \text{ tq } f(0) = 1\}$$

Mq F est fermé dans E puis que $\text{dist}(0_E, F)$ n'est pas atteinte.

$$\bullet \varphi: f \in E \mapsto f(0)$$

$$|\varphi(f)| = |f(0)| \leq \|f\| \quad \text{Donc } \varphi \text{ est linéaire et continue}$$

$$F = \varphi^{-1}(\{1\}) \quad \text{Donc } F \text{ est fermé.}$$

$$\bullet \forall f \in F, \|f - 0\| = \|f\| \geq |f(0)| = 1 \quad \text{donc } \text{dist}(0_E, F) \geq 1$$

on pose $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n: x \mapsto (1-x)^n$

$$f_n(0) = 1$$

$$(f_n)_n \in F^{\mathbb{N}} \quad \text{et} \quad \int_0^1 |f_n(t)| dt = \left[-\frac{(1-x)^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc on a bien $\text{dist}(0_E, F) = 1$.

$\forall f \in F$, comme f est continue et $f(0) = 1$,

f est strictement positive sur un voisinage de 0.

Donc $\|f\| > 1 \quad \forall f \in F$. La distance de 0_E à F n'est donc pas atteinte.

■ mg $\forall f \in F, \int_0^1 |f(t)| dt = 0$ ssi $f = 0$ sur $[0; 1]$.

⇐ OK

⇒ Soit $f \in F$, si $f \neq 0$ alors $\exists t_0 \in [0; 1] \mid |f(t_0)| > 0$

donc il existe un voisinage de t_0 tq $\forall t \in]t_0 - \alpha; t_0 + \alpha[$

$$f(t) > 0 \quad \text{donc} \quad \int_0^1 |f(t)| dt = \int_0^{t_0 - \alpha} |f(t)| dt + \underbrace{\int_{t_0 - \alpha}^{t_0 + \alpha} |f(t)| dt}_{> 0} + \underbrace{\int_{t_0 + \alpha}^1 |f(t)| dt}_{\geq 0}$$

Donc par contraposée, on a ce qu'on veut.