Générateurs des isométries vectorielles :

Références : [Perrin P186] [Isenmann 223]

Enoncé : Soit q une forme quadratique définie positive.

Tout élément u de $O(q)$ est produit d'au plus n réflexions (en fait produit de r réflexions où $r = \text{rang}(u - id)$)

Si $n \geq 3$, si $u \in SO(q)$, u est produit d'au plus r renversem^t

Étapes :

$\boxed{1}$ Lemme : $\dim(H_1 \cap \cdots \cap H_p) \geq \dim(E) - p$

$\boxed{2}$ i) Récurrence sur $r = \text{rang}(u - id)$.

$\boxed{2.1}$ $\exists e \notin \ker(u - id)$ et $u(e) + e \perp u(e) - e$. Mq en posant r_e, réflexion d'hyperplans $\text{Vect}(u(e) - e)^\perp$, $r_e \circ u$ a un rang strictement inférieur à r

$\boxed{2.2}$ Mq r est le nombre min de réflexions en utilisant le lemme

$\boxed{3}$ ii) Mq on a un nombre pair de réflexions et qu'il suffit de mq deux réflexions sont produit d'au plus deux retournements.

$\boxed{3.1}$ cas $n = 3$ $-s_1$ est un renv. $(\ker(s_1 - id) = \cdots)$

$\boxed{3.2}$ cas $n \geq 4$, prendre $V \subset H_1 \cap H_2$ avec $\dim(V) = n - 3$ et en revenant au cas $n = 3$ construire les renv.

Lemme 1 : E, $\mathbb{K}$-ev de dim finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient $H_1, \dots, H_p$ des hyperplans de E, on a
$\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \geq \dim(E) - p$.

Démo : par récurrence sur p le nombre d'hyperplans

$p=1$: $\dim(H_1) = n-1 \geq \dim(E) - 1$.

$p \geq 2$: on suppose le résultat vrai pour $p-1$.

Par la formule de Grassman, on a

$$\underbrace{\dim(\underbrace{H_1 + \dots + H_p}_{\subset E})}_{\leq \dim(E)} = \underbrace{\dim(H_1)}_{= \dim(E)-1} + \overbrace{\dim(H_2 \cap \dots \cap H_p)}^{\mathcal{H}(p-1)\ :\ \geq \dim(E) - p + 1} - \dim(H_1 \cap \dots \cap H_p))$$

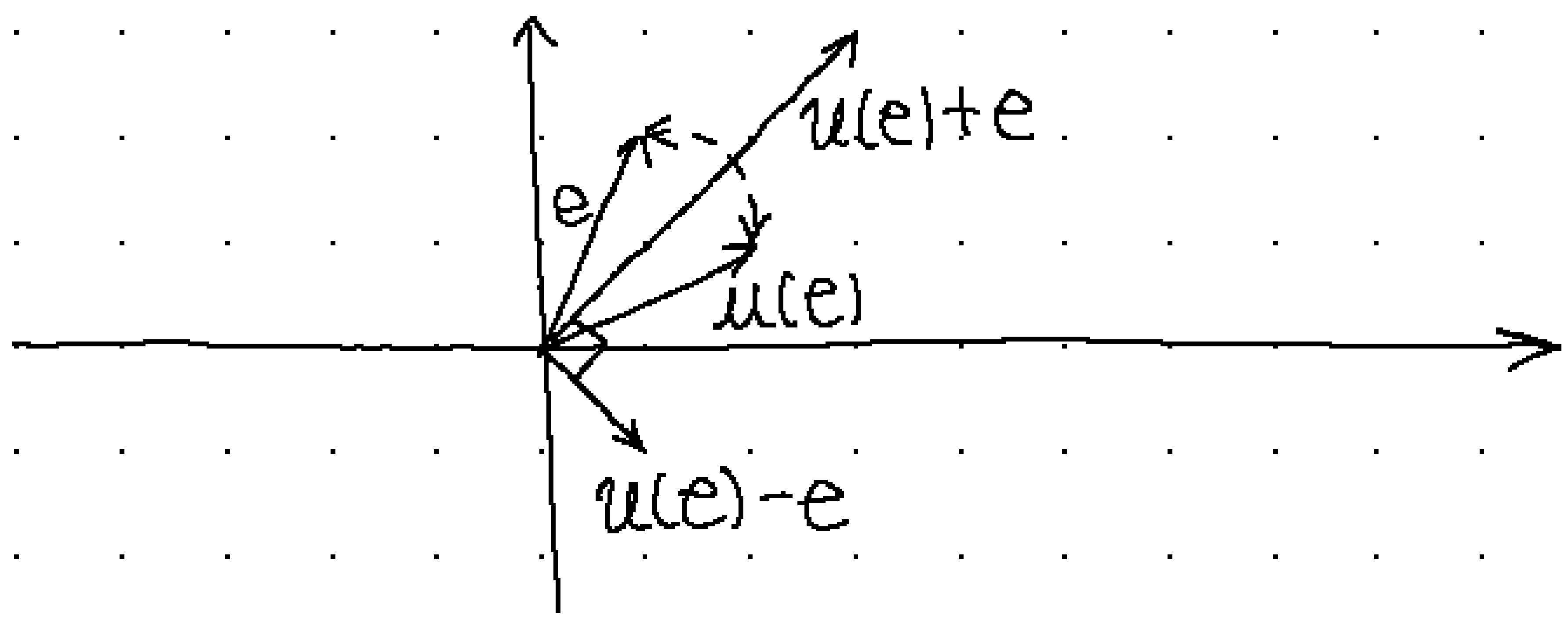
donc $\dim(H_1 \cap \dots \cap H_p) \geq \dim(E) - 1 + \dim(E) - p + 1$
$- \dim(E) = \dim(E) - p$.

D'où $\mathcal{H}(p)$ $\boxtimes$

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit q une forme quadratique définie positive sur E.

On note φ la forme polaire de q.



$\forall r \in [\![0;n]\!]$ on pose $\mathcal{H}(r)$: "Toute isométrie $u \in O(q)$ telle que $\mathrm{rang}(u-id)=r$, u est produit de r réflexions".

<u>Initialisation</u> : $r=0$.

Soit $u \in O(q)$, $\mathrm{rang}(u-id)=0$ donc $\forall x \in E$, $u(x)-x=0$ donc $u=id$. u est le produit de 0 réflexions.

<u>Hérédité</u> : Soit $r \in [\![1;n]\!]$. On suppose $\mathcal{H}(k)$ vraie pour tout $k \in [\![0;r-1]\!]$. Mq $\mathcal{H}(r)$ est vraie

Soit $u \in O(q)$ telle que $\mathrm{rang}(u-id)=r$.

$\triangleright$ comme $r \geq 1$, $\exists x_0 \in E$, $x_0 \notin \ker(u-id)$ i.e. $u(x_0) \neq x_0$. Et donc on a nécessairement $x_0 \neq 0$.

Comme $q(u(x_0))=q(x_0)$, on a $u(x_0)+x_0 \perp u(x_0)-x_0$.

En effet, $\varphi(u(x_0)+x_0; u(x_0)-x_0) = q(u(x_0)) - \varphi(u(x_0);x_0)$
$+ \varphi(x_0;u(x_0)) + q(x_0) = 0$.

Comme q est définie positive elle est en particulier non-dégénérée sur $\mathrm{Vect}(u(x_0)-x_0)$ et on a alors

$$E = \mathrm{Vect}(u(x_0)-x_0)^\perp \oplus \mathrm{Vect}(u(x_0)-x_0)$$

On pose alors r_0 la réflexion associée à l'hyperplan $H_0 = \mathrm{Vect}(u(x_0)-x_0)^\perp$

On a alors $\begin{cases} r_0(u(x_0)-x_0) = x_0 - u(x_0) \\ r_0(u(x_0)+x_0) = u(x_0)+x_0 \end{cases}$

donc $\begin{cases} r_0(u(x_0)) = x_0 \\ r_0(x_0) = u(x_0) \end{cases}$

▷ Mq $\ker(u-id) \subset \ker(r_0 \circ u - id)$

Soit $x \in \ker(u-id)$, on a alors $u(x) = x$.

$(r_0 \circ u - id)(x) = r_0(u(x)) - x = r_0(x) - x$.

Mq $x \in \mathrm{Vect}(u(x_0)-x_0)^\perp$.

$$\varphi(x; u(x_0)-x_0) = \varphi(x; u(x_0)) - \varphi(x; x_0)$$

or $u(x) = x$ donc $\varphi(x; u(x_0)) = \varphi(u(x); u(x_0)) = \varphi(x; x_0)$

Donc $\varphi(x; u(x_0)-x_0) = \varphi(x; x_0) - \varphi(x; x_0) = 0$

Donc $x \in \mathrm{Vect}(u(x_0)-x_0)^\perp$ donc $r_0(x) = x$

Finalement $(r_0 \circ u - id)(x) = 0$ donc $x \in \ker(r_0 \circ u - id)$

D'où l'inclusion $\ker(u-id) \subset \ker(r_0 \circ u - id)$.

Par ailleurs, $x_0 \notin \ker(u-id)$ et

$(r_0 \circ u - id)(x_0) = r_0(u(x_0)) - x_0 = x_0 - x_0 = 0$

donc $\dim(\ker(r_0 \circ u - id)) \geq \dim(\ker(u - id)) + 1$

donc $\text{rang}(r_0 \circ u - id) \leq \text{rang}(u - id) - 1 < r$

Et $r_0 \circ u \in O(q)$ car $u \in O(q)$ et $r_0 \in O(q)$ et $(O(q), \circ)$ est un groupe pour E de dimension finie.

Donc $\exists p \in [\![0; r-1]\!]$ tel que $\text{rang}(r_0 \circ u - id) = p < r$

donc par $\mathcal{H}(p)$, $\exists r_1, \dots, r_p \in O(q)$ p réflexions telles que $r_0 \circ u = r_1 \circ \dots \circ r_p$. Donc comme $r_0^2 = id$, on a

$u = r_0 \circ r_1 \circ \dots \circ r_p$. u est le produit de $p+1 \leq r \leq n$ réflexions.

$\triangleright$ Mq $p + 1 = r$.

Soient $H_1, \dots, H_p$ les hyperplans associés à $r_1, \dots, r_p$.

$H_0 = \text{Vect}(u(x_0) - x_0)^\perp$.

$\forall x \in H_0 \cap \dots \cap H_p$, $\forall i \in [\![0; p]\!]$, $r_i(x) = x$ donc $u(x) = x$

donc $x \in \ker(u - id)$. Donc $H_0 \cap \dots \cap H_p \subseteq \ker(u - id)$

Or par le lemme 1, $\dim(H_0 \cap \dots \cap H_p) \geq \dim(E) - p - 1$

donc $\dim(\ker(u - id)) \geq \dim(E) - p - 1$

donc $p + 1 \geq \text{rang}(u - id)$

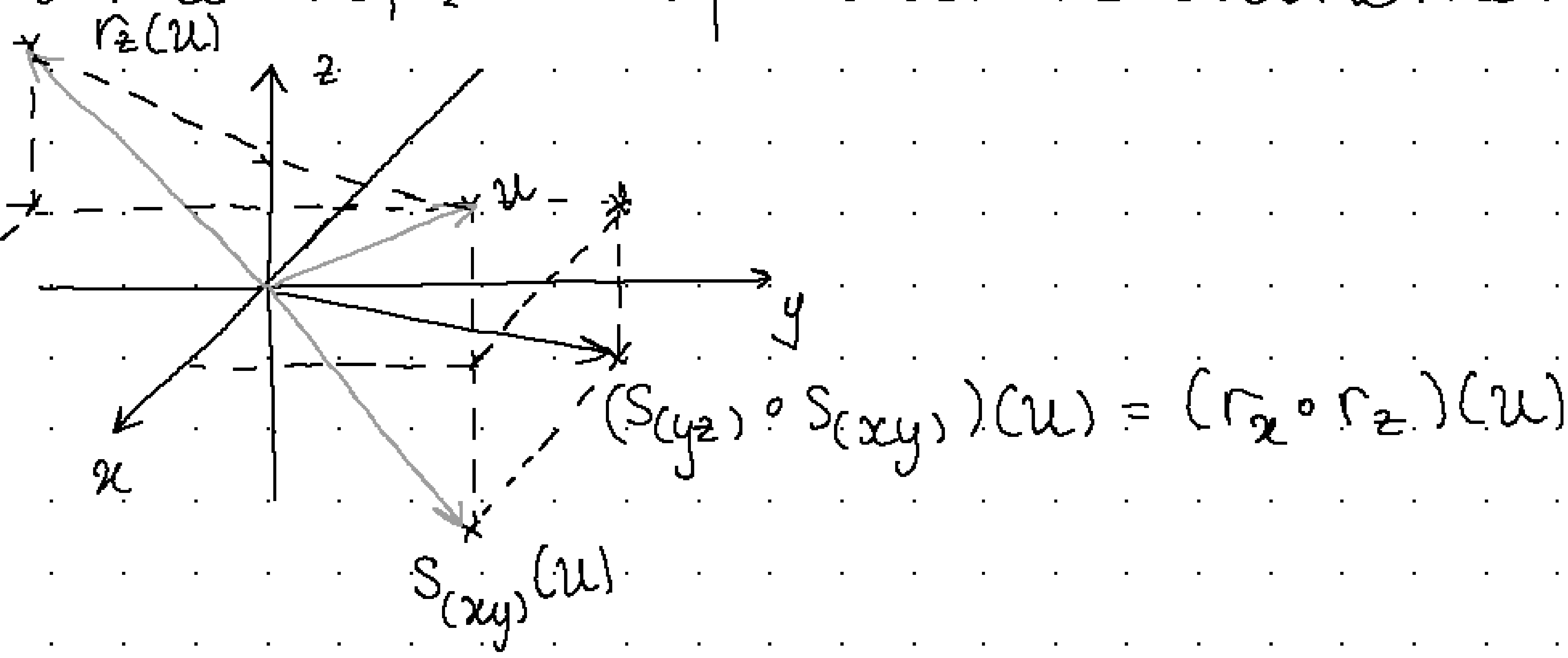
donc $p + 1 \geq r$ or $p + 1 \leq r$ donc $p + 1 = r$.

<u>Conclusion</u> : u est le produit de r réflexions exactement, et $\mathcal{H}(r)$ est vraie. $\boxtimes$

ii) Soit E, ev de dim ≥ 3, $u \in SO(q)$. On note $r = \dim(u - id_E)$. On sait qu'il existe $(s_1, \dots, s_r) \in O(q)$ r réflexions telles que $u = s_1 \circ \dots \circ s_r$.

$\det(u) = 1 = \det(s_1) \times \dots \times \det(s_r) = (-1)^r$ donc $r \in 2\mathbb{N}$

On va alors mq $\forall (s_1, s_2) \in O(q)$ deux réflexions, il existe $r_1, r_2 \in SO(q)$ deux retournements tq $s_1 \circ s_2 = r_1 \circ r_2$



Soient s_1 et s_2 deux réflexions d'hyperplans H_1 et H_2.

▷ Si $n = 3$, alors $-s_1$ et $-s_2$ sont des renversements. En effet, pour une réflexion, $\dim(\ker(s_1 - id)) = 2$ et on a $E = \ker(s_1 - id) \oplus \ker(s_1 + id)$ Pour un renversement r, $\dim(\ker(r - id)) = 1$ Or $\ker(s_1 + id) = \ker(-s_1 - id)$, donc $\dim(\ker(-s_1 - id)) = 3 - 2 = 1$ donc $-s_1$ est un renversemt

Donc $u = s_1 \circ s_2 = (-s_1) \circ (-s_2)$. u est produit de deux renv.

▷ Si $n > 3$, alors :

Si $H_1 = H_2$ alors $s_1 \circ s_2 = id$, produit de zéro retournement.

Si $H_1 \neq H_2$ alors $\dim(H_1+H_2) = n$ donc $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2 \geqslant 2$

Donc il existe $V \subset H_1 \cap H_2$ tq $\dim(V) = n-3$

Comme q est non-dégénérée, $E = V \oplus V^\perp$ et $\dim(V^\perp) = 3$.

Mq $u = s_1 \circ s_2$ laisse V et $V^\perp$ stable.

Soit $x \in V = H_1 \cap H_2$. On a $u(x) = s_1(s_2(x)) = s_1(x) = x$

$u(x) \in V$.

Soit $x \in V^\perp$, mq $u(x) \in V^\perp$. Soit $z \in V$, on a $u(z) = z$

$$\varphi(u(x);z) = \varphi(u(x);u(z)) \underset{u \in O(q)}{=} \varphi(x;z) \underset{x \in V^\perp,\, z \in V}{=} 0$$

Donc V et $V^\perp$ sont stables par u.

On peut alors regarder $u|_V : V \to V$, $u|_V = id_V$

et $u|_{V^\perp} : V^\perp \to V^\perp$ $u|_{V^\perp}$ est l'isométrie induite par u sur $V^\perp$. Donc par i) il existe σ_1 et σ_2 deux réflexions telles que $u|_{V^\perp} = \sigma_1 \circ \sigma_2 = (-\sigma_1) \circ (-\sigma_2) = \tau_1 \circ \tau_2$

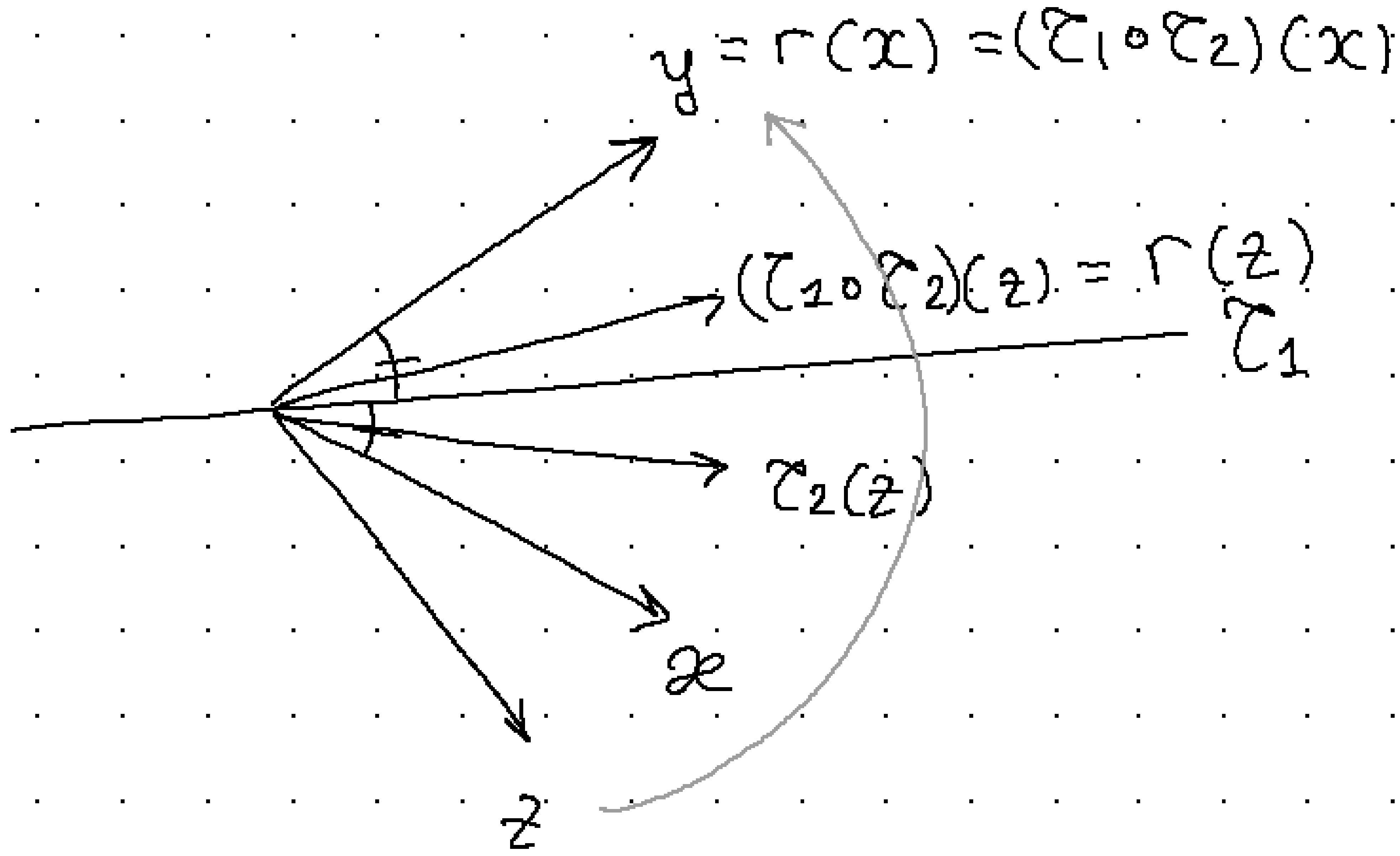
où τ_1 et τ_2 sont donc des renversements car $\dim(V^\perp) = 3$.

On prolonge τ_1 et τ_2 en r_1 et r_2 sur E par l'identité sur V.

On a alors $u = r_1 \circ r_2$ est bien produit de deux renversements.

Questions de Raimbault :

▷ Comment faire une rotation à partir de réflexions ?



$\tau_1(x) = y$

$(\tau_1 \circ \tau_2)(x) = y$

si $\tau_2(x) = x$

▷ $n=2$ renversements : $\pm Id$

▷ Construction géométrique du théorème en dim 3 :

Une rotation en dim 3 : on tourne autour d'un axe.

▷ Cas q non-dégénérée : on a le même résultat mais le cas x isotrope est plus compliqué à gérer.