Système Lotka-Volterra :

Référence : [FGN Analyse 4 250] [Berthelin 198]

Énoncé : Soient $a, b, c, d > 0$ et $x_0, y_0 \geqslant 0$. Il existe une unique solution globale sur $\mathbb{R}$ au système différentiel

$$(V) \begin{cases} x' = ax - bxy \\ y' = -cy + dxy \\ x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

et on a $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et x et y sont périodiques.

Étapes :

(E1) Mettre le pb sous forme $X' = F(X)$ + C.L.

(E2) Mq les solutions ne s'annulent jamais

(E3) Mq les solutions sont globales en posant
$H : (u; v) \mapsto du - c\ln(u) + bv - a\ln(v)$

(E4) Mq les solutions sont périodiques

(E5) Calculer la moyenne des solutions. Mq la pêche aide les sardines.

(E1) On reformule ce pb en pb de Cauchy pour pouvoir appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz

On pose $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} au - buv \\ -cv + duv \end{pmatrix}$$

F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (ses composantes le sont)

Donc par le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème $(V') = \begin{cases} Y = F(Y) \\ Y(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \end{cases}$ a une unique solution maximale pour la condition $X(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

- Si $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$ $X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- Si $x_0 > 0$ et $y_0 = 0$ $X(t) = \begin{pmatrix} x_0 e^{at} \\ 0 \end{pmatrix}$ définie sur $\mathbb{R}$ est la sol. max et on a croissance exponentielle des sardines qui ne sont pas prédatées en l'absence de requin.
- Si $x_0 = 0$ et $y_0 > 0$ alors $X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 e^{-ct} \end{pmatrix}$ définie sur $\mathbb{R}$ est la solution maximale et on a cette fois décroissance exponentielle des requins qui ne se nourrissent plus sans sardines

(E2) Si $x_0, y_0 > 0$, on note I l'intervalle d'existence de la solution maximale de (V'), X.

Mq $\forall t\in I$ $x(t)>0$, $y(t)>0$.

Si $\exists t_1 \in I$ $x(t_1)=0$

On s'intéresse alors au système différentiel

$$(V'') : \begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(t_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ y(t_1) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Par Cauchy-Lipschitz ce système a une unique solution maximale $\tilde{X} : t\in J \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ y(t_1)e^{-c(t-t_1)} \end{pmatrix}$

Ainsi $X(t_1) = \tilde{X}(t_1)$ par unicité de la solution max de (V'') donc $X = \tilde{X}$ et en particulier $x(0) = 0 = x_0$.

Contradiction. Donc x ne s'annule jamais.

On montre de même que y ne s'annule jamais.

(E3) Mq la solution est globale :

On introduit $H : (u,v) \mapsto du + bv - c\ln(u) - a\ln(v)$
$(\mathbb{R}_+^*)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

Soit $\gamma : t\in I \longrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

$H\circ\gamma : t\in I \longrightarrow dx(t) + by(t) - c\ln(x(t)) - a\ln(y(t))$ est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables. Soit $t\in I$,

$$(H\circ\gamma)'(t) = dx'(t) + by'(t) - c\frac{x'(t)}{x(t)} - a\frac{y'(t)}{y(t)}$$

On note $x = x(t)$, $y = y(t)$, on a alors

$$(H\circ\gamma)(t) = d(ax - bxy) + b(-cy + dxy) - c(a - by) - a(-c + dx)$$

$$= \cancel{dax} - \cancel{dax} - \cancel{dbxy} + \cancel{dbxy} - \cancel{cby} + \cancel{cby} - \cancel{ca} + \cancel{ca} = 0$$

Donc $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $(H\circ\gamma)(t) = c$ pour tout $t \in I$.

Pour mq la solution est globale on va mq elle est bornée pour pouvoir appliquer le théorème des bouts.

On considère alors $f : u \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto du - c\ln(u)$

$g : v \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto bv - a\ln(v)$

Ainsi, $H : \binom{u}{v} \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \mapsto f(u) + g(v)$

On étudie leurs variations : f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a, pour tout $(u;v) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$,

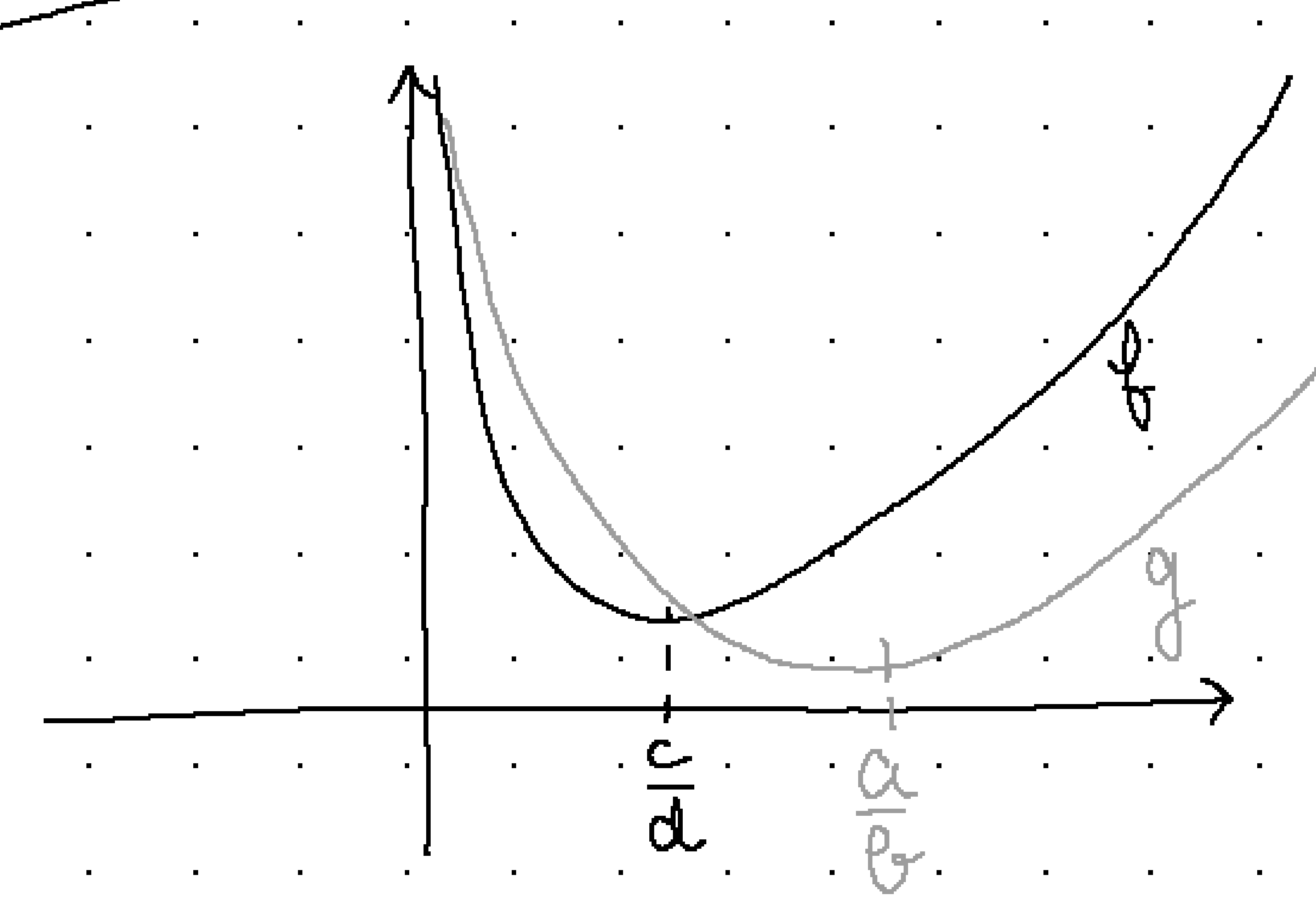
$$f'(u) = d - \frac{c}{u} \qquad g'(v) = b - \frac{a}{v}$$

Donc on a

u	0		$\frac{c}{d}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	m_f	$\nearrow$	$+\infty$

et

v	0		$\frac{a}{b}$		$+\infty$
g'		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	m_g	$\nearrow$	$+\infty$



Ainsi f est minorée par m_f et g par m_g

Or $\forall t \in I$, $H\left(\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right) = c = f(x(t)) + g(y(t))$.

Donc $\forall t \in I$, $f(x(t)) = c - g(y(t))$

$-g$ est majorée par $-m_g$ et f est minorée par m_f.

Donc $f \circ x$ est bornée sur I

Donc x est bornée sur I car $f(u) \xrightarrow[u \to +\infty]{} +\infty$

De même on mq y est bornée sur I.

Donc X est bornée sur I. Donc par le théorème des bouts

$I = \mathbb{R}$ et X est globale.

<u>Si on ne veut pas utiliser le thm des bouts</u> :

Si I est majoré on note $s = \sup(I)$, $\forall t \in I$, $x(t)$ et $y(t)$ sont majorées donc contenus dans un compact K et F étant continue sur K^2 elle est bornée sur K.

Donc comme $\forall t \in I$ $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = F\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$, X' est bornée sur I. Ainsi, $\forall (t;t') \in I^2$, X est continue sur $[t;t']$, dérivable sur $]t;t'[$ et $\exists M > 0$ tq $\forall z \in]t;t'[$, $\|X'(z)\| \leq M$

Donc par l'IAF, $\|X(t) - X(t')\| \leq M|t - t'|$

donc x a une limite quand $t \to s$. On note l cette limite.

Par le thm de Cauchy-Lipschitz, il existe une solution

X^2 au problème

$$(V''') : \begin{cases} Y' = F(Y) \\ Y(s) = \ell \end{cases}$$

définie sur $J =]s-\eta ; s+\eta[$ $\eta > 0$.

On pose alors $\tilde{X} : t \longmapsto \begin{cases} X(t) & t \in I \\ X_2(t) & t \in [s ; s+\eta[\end{cases}$

$\tilde{X}$ vérifie $X' = F(X)$ sur sont intervalle de définition

$\tilde{X}$ est continue en s, mq elle est dérivable : Si $t < s$

$$\frac{\tilde{X}(t) - \tilde{X}(s)}{t-s} = \frac{X(t) - \ell}{t-s}$$

Par le thm de Taylor-Lagrange, $\exists z(t) \in]t ; s[$ tq

$$X(s) = X(t) + X'(z) \times (s-t)$$

donc $\dfrac{X(t) - \ell}{t-s} = X'(z(t)) = F(X(z(t)))$ qui admet

une limite en s par continuité de X en s et F sur $\mathbb{R}$.

Donc $\dfrac{X(t) - \ell}{t-s}$ a une limite à gauche de s,

$F(X(s)) = F(\ell)$. De même à droite

et les dérivées sont continues en s. Donc $\tilde{X}$ est $\mathcal{C}^1$

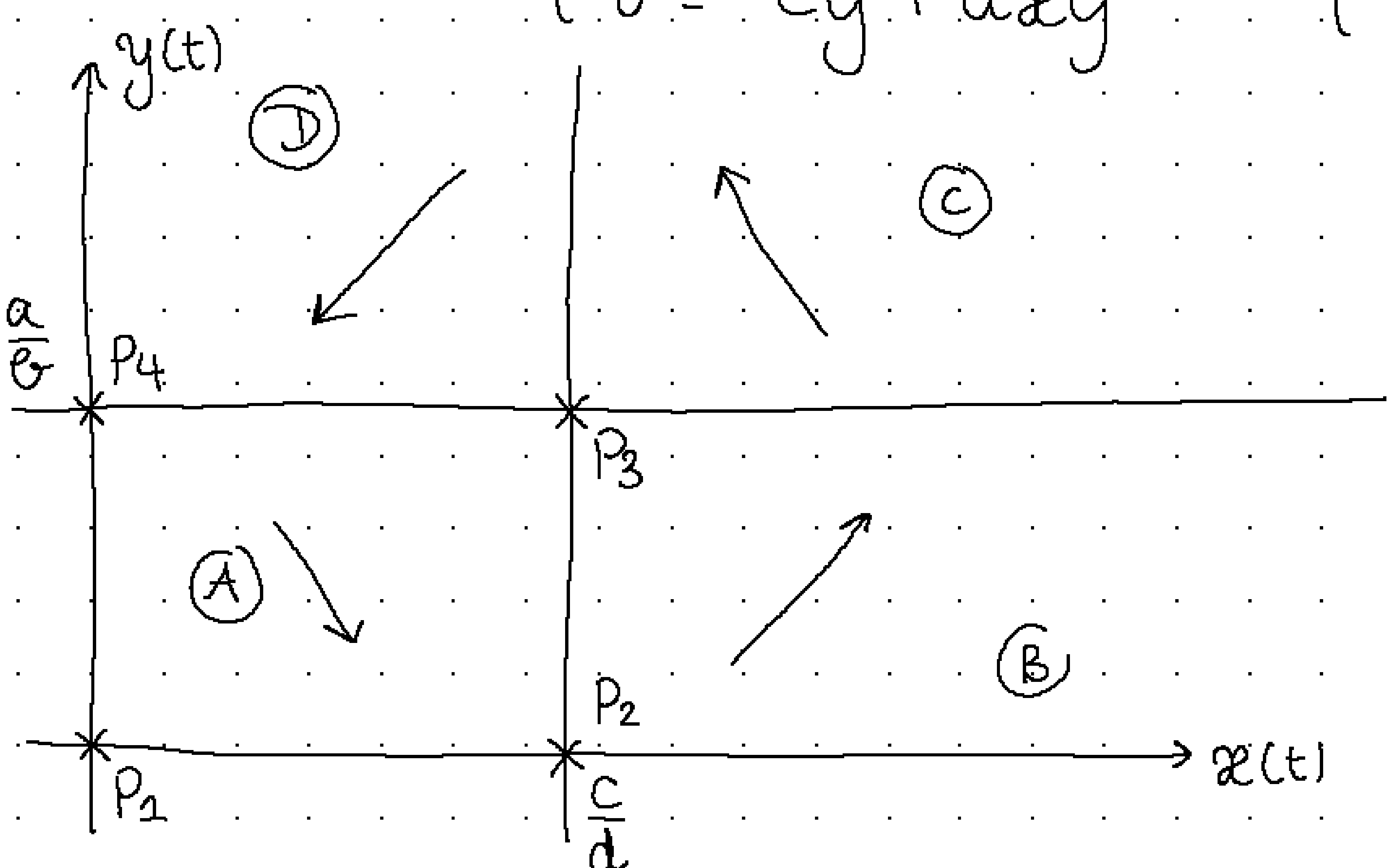
sur $I \cup J$ et est solution de (V'), donc I n'était

pas maximale. Ainsi, I n'est pas borné, $I = \mathbb{R}$.

(E4) Mq les solutions sont périodiques

On cherche les points stationnaires (i.e. $X'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$)

On résout : $\begin{cases} 0 = ax - bxy \\ 0 = -cy + dxy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } y = \frac{a}{b} \\ y = 0 \text{ ou } x = \frac{c}{d} \end{cases}$



$\begin{cases} x'(t) = x(t)(a - by(t)) \\ y'(t) = y(t)(-c + dx(t)) \end{cases}$ si $y < \frac{a}{b}$, $x' \geq 0$; si $x > \frac{c}{d}$ $y' \geq 0$

Donc dans (A) $x' \geq 0$ $y' \leq 0$, $\searrow$ (B) $x' \geq 0$ $y' \geq 0$ $\nearrow$

(C) $x' \leq 0$, $y' \geq 0$ $\nwarrow$ (D) $x' \leq 0$, $y' \leq 0$ $\swarrow$

▷ Si $x_0 = \frac{c}{d}$ et $y_0 = \frac{a}{b}$ alors x et y sont constantes

▷ Sinon, mq la trajectoire quitte toujours une zone :

Supposons $(x_0; y_0) \in A$. Alors $x \nearrow$, $y \searrow$.

Si $\forall t \in \mathbb{R}$ $(x(t); y(t)) \in A$ alors comme x est croissante majorée et y décroissante minorée, elles ont une limite finie en $+\infty$. Donc x' et y', par (V'), ont aussi

une limite finie donc nulle car x est bornée :
(Soit $\lim\limits_{t \to +\infty} (x'(t)) = l$. Si $l > 0$, $\exists A \in \mathbb{R}\ \forall t \in \mathbb{R} (t \geq A \Rightarrow x'(t) \geq \frac{l}{2})$
donc en intégrant, $x(t) \geq \frac{l}{2} t + \text{cste} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty$)

Donc comme $x_0 > 0$ et $x \nearrow$, $\lim\limits_{t \to +\infty} (x(t)) > 0$
donc comme $x' = ax - bxy$, par passage à la limite, $y(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{a}{b}$. De même $x(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{c}{d}$

- Si $x_0 = \frac{c}{d}$, x est constante donc $x' = 0$ donc y est constante donc $y = \frac{a}{b}$ or on a exclu le cas $(x_0 ; y_0) = (\frac{c}{d} ; \frac{a}{b})$ donc $y_0 < \frac{a}{b}$ donc $y = \frac{a}{b}$ contredit la décroissance de y.

- Si $x_0 < \frac{c}{d}$ alors
  - Si $y_0 = \frac{a}{b}$ même chose qu'au cas précédent
  - Si $y_0 < \frac{a}{b}$ alors y étant décroissante $y(t) \not\xrightarrow[t \to +\infty]{} \frac{a}{b}$

Donc on en conclut que $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ quitte la zone A.
Mq la solution quitte B.
Comme x et y sont majorées et croissantes alors elles ont des limites finies.
Et ainsi de suite.
Il existe donc un temps t_0 auquel X quitte A.

Donc en ce point $x(t_0) = \frac{c}{d}$

Comme on revient puis requitte Ⓐ, $\exists t_1 \in \mathbb{R}$ tq $x(t_1) = \frac{c}{d}$

Mq $y(t_0) = y(t_1)$.

On sait que $H\begin{pmatrix} x(t_0) \\ y(t_0) \end{pmatrix} = H\begin{pmatrix} x(t_1) \\ y(t_1) \end{pmatrix}$

Donc $g(y(t_0)) = g(y(t_1))$

Or comme les points sont dans Ⓐ, $(y(t_0), y(t_1)) \in]0; \frac{a}{b}]$

Or g est strictement décroissante sur $]0; \frac{a}{b}]$ donc

$\exists! \, c \in]0, \frac{a}{b}]$ tq $g(c) = g(y(t_0)) = g(y(t_1))$

donc $y(t_0) = y(t_1)$

donc $X(t_0) = X(t_1)$.

On pose $X_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$t \mapsto X(t + t_1 - t_0)$

$X_3(t_0) = X(t_1)$

$X_3' = X'(t + t_1 - t_0) = F(X_3)$

Donc X_3 et X sont égales. $\forall t \in \mathbb{R}$ $X(t) = X(t + t_1 - t_0)$.

Donc X est périodique

(E5) Calculons la moyenne de X.

Comme X est périodique $\int_0^T \frac{x'(t)}{x(t)} dt = \left[\ln(x(t))\right]_0^T = 0$

donc $\int_0^T a - by(t) \, dt = 0$ dc $\frac{1}{T} \int_0^T y(t) \, dt = \frac{a}{b}$

et on mq

$$\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\,dt = \frac{c}{d}$$

si on modifie les équations en ajoutant un taux de pêche $\begin{cases} x' = (a-\varepsilon)x - bxy \\ y' = (-c-\delta)y + dxy \end{cases}$

Donc les moyennes deviennent pour x : $\dfrac{c+\delta}{d}$

pour y : $\dfrac{a-\varepsilon}{b}$

donc c'est favorable aux sardines.