$\ell^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert :

<u>Référence</u> : [Dantzer p.267]

<u>Énoncé</u> : $\ell^2(\mathbb{R}) = \{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge} \}$

i) $\ell^2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

ii) Si $(u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}$, $\sum_{n\geq 0} (u_n \cdot v_n)$ est absolument convergente.

iii) $\varphi : \ell^2(\mathbb{R}) \times \ell^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $((u_n)_{n\geq 0} ; (v_n)_{n\geq 0}) \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$ est un produit scalaire sur $\ell^2(\mathbb{R})$, et on note $\|\cdot\|_2$ la norme correspondante.

iv) L'espace vectoriel $(\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ est un espace de Hilbert.

<u>Étapes</u> : pour le (iv)

(E1) Mq si (U_p) est de Cauchy, $(u_{p,n})_{p\geq 0}$ est de Cauchy donc convergente $u_{p,n} \xrightarrow[p\to+\infty]{} \gamma_n$

(E2) Mq $(\gamma_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{R})$ en utilisant $(U_p)_{p\geq 0}$ est de Cauchy donc majorée

(E3) Mq $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{p,n} - \gamma_n)^2 \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$

i). Pour mq $\ell^2(\mathbb{R})$ est un e.v. on mq c'est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

▷ $(0)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{R})$

▷ Soit $((u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}) \in (\ell^2(\mathbb{R}))^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$

On a l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

donc $\forall n \in \mathbb{N} \quad (u_n + \lambda v_n)^2 \leq \underbrace{2(u_n^2 + \lambda^2 v_n^2)}_{\text{terme général d'une série convergente}}$

Par comparaison $\sum_{n\geq 0} (u_n + \lambda v_n)^2$ converge donc $(u_n + \lambda v_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{R})$

Donc $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

ii) À nouveau, $\forall ((u_n)_{n\geq 0}, (v_n)_{n\geq 0}) \in \ell^2(\mathbb{R})$,

$\forall n \in \mathbb{N} \quad |2 u_n v_n| \leq u_n^2 + v_n^2$ donc par comparaison $\sum_{n\geq 0} |u_n v_n|$ converge, donc $\sum_{n\geq 0} u_n v_n$ converge

iii) ▷ φ est bilinéaire par linéarité de la somme et symétrique et positive.

▷ φ est définie car $\forall (u_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{R})$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 = 0$ ssi $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n = 0$ ssi $(u_n) = (0)$

Donc φ est un produit scalaire, dont on note la norme associée $\|\cdot\|_2$.

iv) Mq $(\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ est un Hilbert.

On doit mq cet espace est complet.

Soit $(U_p)_{p\geq 0}$ une suite de Cauchy de $\ell^2(\mathbb{R})$.

$\forall p \in \mathbb{N}$ on note $U_p = (u_{p,n})_{n\geq 0}$ la suite de $\ell^2(\mathbb{R})$ U_p.

Mq $(U_p)_{p\geq 0}$ converge.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathbb{N}$, $\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2$

$(p \geq N$ et $q \geq N \Rightarrow \|U_p - U_q\|_2 \leq \varepsilon)$

Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tq $p \geq P$ et $q \geq P$.

$\|U_p - U_q\|_2 \leq \varepsilon$

donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{p,n} - u_{q,n})^2 \leq \varepsilon$ $\quad (*)$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $|u_{p,n} - u_{q,n}| \leq \varepsilon$

Soit $n \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{p,n})_{p\geq 0}$ est une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Donc elle converge. On note $\gamma_n \in \mathbb{R}$ sa limite.

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}$, $(u_{p,n})_{p\geq 0}$ est une suite réelle de lim. γ_n.

Mq $(U_p)_{p\geq 0}$ converge vers la suite réelle $(\gamma_n)_{n\geq 0}$.

① Mq $(\gamma_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{R})$

On veut majorer la suite des sommes partielles.

Comme $(U_p)_{p\geq 0}$ est de Cauchy, elle est bornée.

Donc $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall p \in \mathbb{N}$ $\|U_p\|_2 \leq M$.

et $\forall p \in \mathbb{N}$ on a alors

$$\|U_p\|_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{p,n}^2 \leq M$$

Donc

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, \quad \sum_{n=0}^{N} u_{p,n}^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_{p,n}^2 \leq M$$

donc en faisant $p \to +\infty$,

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{N} \gamma_n^2 \leq M$$

Donc la suite des sommes partielles $\left(\sum_{n=0}^{N} \gamma_n^2\right)_{N \geq 0}$ est croissante et majorée, elle converge

Donc $(\gamma_n)_{n \geq 0} \in \ell^2(\mathbb{R})$. on note $\Gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0}$

② Mq $\|U_p - \Gamma\|_2 \xrightarrow[p \to +\infty]{} 0$

On a par $(*)$, pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, $p \geq P$, $q \geq P$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{p,n} - u_{q,n})^2 \leq \varepsilon$$

Donc $\forall N \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{N} (u_{p,n} - u_{q,n})^2 \leq \varepsilon$$

Donc en faisant tendre q vers $+\infty$,

$$\forall N \in \mathbb{N} \quad \sum_{n=0}^{N} (u_{p,n} - \gamma_n)^2 \leq \varepsilon$$

Donc par majoration des sommes partielles, suite $\nearrow$,

$$\|U_p - \Gamma\|_2 = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} (u_{p,n} - \gamma_n)^2 \right) \leq \varepsilon$$

Finalement $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N} \ \forall p \in \mathbb{N} \ (p \geq P \Rightarrow \|U_p - \Gamma\|_2 \leq \varepsilon)$

Donc $(\ell^2(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ est un espace complet $\square$