Etapes

1) Mq $\|{}^t\Omega A \Omega\| = \|A\|$

ie $\sum_{i,j} b_{i,j}^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$

2) Mq les coef (p,p) (p,q) (q,p) (q,q) sont " à part "
et que leur transfo est $\begin{pmatrix} \cos & \sin \\ -\sin & \cos \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

donc que $b_{pp}^2 + 2b_{qp}^2 + b_{qq}^2 = a_{pp}^2 + 2a_{pq}^2 + a_{qq}^2$

3) Trouver le θ qui annule b_{qp}

↳ on a alors $b_{pp}^2 + b_{qq}^2 = a_{pp}^2 + 2a_{pq}^2 + a_{qq}^2$

et comme $a_{ii} = b_{ii}$ $i \neq p,q$ $\sum_i b_{ii}^2 = \sum_i a_{ii}^2 + 2a_{pq}^2$

4) Poser $A_k = {}^t\Omega_k A_k \Omega_k$ avec Ω_k construit $a_{pq}^k = \max_{i,j} |a_{ij}^k|$ $i \neq j$

Poser $A_k = D_k + B_k$, mq $B_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$ avec $\|B_k\| = \underbrace{\sum_{i \neq j} b_{ij}^2}_{\mathcal{E}_{k+1}} = \underbrace{\sum a_{ij}^k}_{= \mathcal{E}_k} - 2|a_{pq}|^2$

$\mathcal{E}_{k+1} \leq \mathcal{E}_k - 2|a_{pq}|^2$ et $\mathcal{E}_k \leq n(n-1)|a_{pq}|^2$

puis $D_k \to \mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(i)})$ à l'aide du lemme

" X evn dim finie $(x_k)_k$ suite bornée + nb fini vda +
$\lim \|x_{k+1} - x_k\| = 0$ alors $(x_k)_k$ cv.

- Nb fini vda : utiliser une sous-suite cvgte et utiliser $\mathcal{C}°$ det

- bornée : $\|D_k\| \leq \|A_k\| = \|A\|$

- $\|D_{k+1} - D_k\| \to 0$ $d_{ii}^{k+1} = d_{ii}^k$ $i \neq p,q$ $d_{pp}^{k+1} = d_{pp}^k + a_{p,q}(\cdots)$
et $|a_{pq}| \leq \mathcal{E}_k \to 0$

Alors on a aussi $A_k \to \mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(i)})$.

MÉTHODES DE CALCUL DE VALEURS PROPRES ET VECTEURS PROPRES

MÉTHODE DE JACOBI

Enoncé thm 1

Théorème 6.1.1.

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ $\quad 1 \leq p < q \leq n$, $\theta \in \mathbb{R}$.

On pose

$$\Omega = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \cos\theta & \sin\theta & & \\ & & -\sin\theta & \cos\theta & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \leftarrow p \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow \qquad \uparrow \\ p \qquad q \end{matrix} & \end{array}$$

- Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice symétrique, alors $B = {}^t\Omega A \Omega = (b_{i,j})$ est aussi symétrique et elle vérifie $\sum_{i,j=1}^{n} b_{i,j}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}^2$

- Si $a_{p,q} \neq 0$, il existe une unique valeur de θ dans $\left]-\frac{\pi}{4}; 0\right[\cup \left]0; \frac{\pi}{4}\right[$ telle que $b_{p,q} = 0$

C'est la seule solution, dans le même ensemble, de

$$\operatorname{cotan}(2\theta) = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$$

Le nombre θ vérifiant de telles conditions, on a

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^2 + 2a_{p,q}^2$$

<u>Preuve</u>: soient $p,q \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq p < q \leq n$, soit $\theta \in \mathbb{R}$

On pose

$$\begin{array}{cc}
\Omega = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \cos\theta & & \sin\theta & & \\ & & & & 1 \ddots 1 & & & \\ & & & -\sin\theta & & \cos\theta & & \\ & & & & & & 1 \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \leftarrow q \\ \\ \\ \end{array} \\
\begin{array}{cccccccc} & & & \uparrow & & \uparrow & & \\ & & & p & & q & & \end{array} &
\end{array}$$

Alors $\boxed{\Omega \in O_n(\mathbb{R})}$

Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$, on pose $B = {}^t\Omega A \Omega$, on a alors $B \in S_n(\mathbb{R})$

On considère $\|A\| = \sqrt{Tr({}^tAA)}$

Comme $Tr(AB) = Tr(BA)$ on a $Tr(B) = Tr({}^t\Omega A \Omega) = Tr(A)$

donc $\boxed{\|B\| = \|A\|}$

On note $B = (b_{i,j})_{i,j}$ et $A = (a_{i,j})_{i,j}$

Alors $\|B\| = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} b_{i,j}^2$ et $\|A\| = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j}^2$

Donc $\boxed{\sum_{i,j} b_{i,j}^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2}$

La transformation portant sur les éléments d'indices (p,p) (p,q) (q,p) et (q,q) s'écrit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} b_{p,p} & b_{p,q} \\ b_{q,p} & b_{q,q} \end{pmatrix}}_{Mb} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{{}^tO} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{p,p} & a_{p,q} \\ a_{q,p} & a_{q,q} \end{pmatrix}}_{Ma} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{O}$$

En effet par le produit $A\Omega$, l'élément d'indice

(p,p) va être f° de $a_{p,p}$ et $a_{p,q}$

(p,q) ——— $a_{p,p}$ et $a_{p,q}$

(q,p) ——— $a_{q,p}$ et $a_{q,q}$

(q;q) ——— $a_{q,p}$ et $a_{q,q}$

Puis la transformation ${}^t\Omega(A\Omega)$, l'élément d'indice

(p,p) va être f° de $c_{p,p}$ et $c_{q,p}$ donc de $a_{p,p}, a_{p,q}, a_{q,p}, a_{qq}$.

(p,q) ———

(q,p) ——— $c_{p,q}$ et $c_{q,q}$ ———

(q;q) ———

Donc ils ne dépendent pas de ce qu'il se passe pour les autres coef.

On a par ailleurs $O \in O_n(\mathbb{R})$ donc $\|Mb\| = \|Ma\|$

Donc $b_{p,p}^2 + 2b_{p,q}^2 + b_{q,q}^2 = a_{p,p}^2 + 2a_{p,q}^2 + a_{q,q}^2$.

$$\begin{pmatrix} a_{p,p} & a_{p,q} \\ a_{q,p} & a_{q,q} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)a_{pp} - \sin(\theta)a_{pq} & \sin(\theta)a_{pp} + \cos(\theta)a_{pq} \\ \cos(\theta)a_{qp} - \sin(\theta)a_{qq} & \sin(\theta)a_{qp} + \cos(\theta)a_{qq} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta)a_{pp}-\sin(\theta)a_{pq} & \sin(\theta)a_{pp}+\cos(\theta)a_{pq} \\ \cos(\theta)a_{qp}-\sin(\theta)a_{qq} & \sin(\theta)a_{qp}+\cos(\theta)a_{qq} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$b_{p,q} = \cos(\theta)\times(\sin(\theta)a_{p,p}+\cos(\theta)a_{p,q}) - \sin(\theta)(\sin(\theta)a_{qp}+\cos(\theta)a_{qq})$$

$$b_{p,q} = \cos(\theta)\sin(\theta)a_{p,p} - \sin(\theta)\cos(\theta)a_{q,q} + (\cos(\theta)^2-\sin(\theta)^2)a_{p,q}$$

$$\boxed{b_{p,q} = \frac{\sin(2\theta)}{2}(a_{p,p}-a_{q,q}) + \cos(2\theta)a_{p,q}}$$

$$b_{p,p} = \cos(\theta)^2 a_{pp} - \sin(\theta)\cos(\theta)a_{p,q} - \cos(\theta)\sin(\theta)a_{q,p} + \sin(\theta)^2 a_{qq}$$

$$b_{q,q} = \sin(\theta)^2 a_{p,p} + \sin(\theta)\cos(\theta)a_{p,q} + \sin(\theta)\cos(\theta)a_{q,p} + \cos(\theta)^2 a_{qq}$$

On veut $b_{p,q} = 0$

donc si $a_{p,q} \neq 0$ $\boxed{\cotan(2\theta) = \frac{a_{q,q}-a_{p,p}}{2a_{p,q}}}$ $\theta \in]-\frac{\pi}{4};0[\cup]0;\frac{\pi}{4}[$

Dans ce cas, $(*)$ devient $\boxed{b_{p,p}^2 + b_{q,q}^2 = a_{pp}^2 + 2a_{p,q}^2 + a_{q,q}^2}$

$\forall i \neq p,q$ alors $b_{i,i} = a_{i,i}$ donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} b_{i,i}^2 = \sum_{i=1}^{m} a_{i,i}^2 + 2a_{pq}^2}$$

Commentaire : le poids total des coefs ne change pas, $\sum_{i,j} b_{i,j}^2 = \sum_{i,j} a_{i,j}^2$ mais la diagonale se retrouve renforcée.

Théorème 6.1-2 : $\forall k \in \mathbb{N}$, on pose $A_{k+1} = {}^t\Omega_k A_k \Omega_k$ et on construit Ω_k en choisissant (p,q) tq $|a_{p,q}| = \max$.

Alors $(A_k)_k$ converge vers $\operatorname{diag}(\lambda_{\sigma(i)})$ $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$B_k = A_k - D_k \quad \text{où} \quad D_k = \operatorname{diag}(a_{i,i}^k)$$

Mq $B_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

$$\|B_k\| = \sum_{i \neq j} (a_{i,j})^2 = \varepsilon_k$$

donc par le thm 6.1.1., $\|B_{k+1}\| = \|B_k\| - 2|a_{p,q}^k|^2$, et

donc $\varepsilon_{k+1} = \varepsilon_k - 2|a_{p,q}^k|^2$

Comme on a choisi $|a_{p,q}^k|$ de sorte à maximiser son module, $\varepsilon_k \leq (n^2 - n)|a_{p,q}^k|^2$

$$\frac{-2\varepsilon_k}{(n^2-n)} \geq -2|a_{p,q}^k|^2$$

$n \geq 2$ donc $n(n-1) \geq 2$

Donc $\varepsilon_{k+1} \leq \varepsilon_k - \dfrac{2\varepsilon_k}{(n^2-n)} = \varepsilon_k \left(1 - \dfrac{2}{n(n-1)}\right)$

Donc $\varepsilon_{k+1} \leq \underbrace{\left(1 - \dfrac{2}{n(n-1)}\right)^k}_{\xrightarrow[k \to +\infty]{} 0} \varepsilon_0$

Donc $\boxed{B_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0}$

<u>Lemme</u> : soit X un evn de dim. finie, (x_k) une suite bornée de X, tq (x_k) a un nb fini de vda et tq $\lim\limits_{k \to +\infty} \|x_{k+1} - x_k\| = 0$. Alors (x_k) cv

<u>Preuve</u> : à faire

On s'intéresse alors à la suite $(D_k)_k$, et on va chercher à utiliser le lemme.

On suppose que les valeurs propres de A sont $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

▷ Si $(D_{\varphi(k)})_k$ une suite extraite de $(D_k)_k$ converge vers une matrice D, alors $(A_{\varphi(k)})_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} D$ car $B_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$

Donc $\det(A_{\varphi(k)} - \lambda I_n) \xrightarrow[k \to +\infty]{} \det(D - \lambda I_n)$ par continuité du déterminant.

Or $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A_{\varphi(k)} = \underbrace{{}^t\Omega_{\varphi(k)} \cdots {}^t\Omega_1}_{= O_1^{-1}} A \underbrace{\Omega_1 \cdots \Omega_{\varphi(k)}}_{= O_1}$

donc $A_{\varphi(k)}$ et A ont même polynôme caractéristique

donc $\det(D - \lambda I_n) = \det(A - \lambda I_n)$

donc D a aussi pour valeurs propres $\lambda_1, \dots \lambda_n$.

En particulier, $\boxed{\exists \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ tq } D = \operatorname{diag}(\lambda_{\sigma(i)})_i}$

Et donc toute vda de (D_k) est de ce type là donc il y en a $\boxed{\text{au maximum } n!}$

▷ Mq $\lim_{k \to +\infty} (D_{k+1} - D_k) = 0$

$D_k = \operatorname{diag}(a_{ii}^{k})$ $D_{k+1} = \operatorname{diag}(a_{ii}^{k+1})$

donc $D_{k+1} - D_k = a_{ii}^{k+1} - a_{ii}^k = 0$ si $i \neq p$ et $i \neq q$

et

$b_{p,p} = \cos(\theta)^2 a_{pp} - \sin(\theta)\cos(\theta) a_{p,q} - \cos(\theta)\sin(\theta) a_{q,p} + \sin(\theta)^2 a_{qq}$

$b_{q,q} = \sin(\theta)^2 a_{p,p} + \sin(\theta)\cos(\theta) a_{p,q} + \sin(\theta)\cos(\theta) a_{q,p} + \cos(\theta)^2 a_{qq}$

et $\frac{2\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)} a_{pq} = a_{qq} - a_{pp}$

donc $b_{pp} = a_{pp}\cos(\theta)^2 + a_{qq}\sin(\theta)^2 - a_{pq}\sin(2\theta)$

donc $b_{p,p} = (1-\sin(\theta)^2) a_{pp} + a_{qq}\sin(\theta)^2 - a_{pq}\sin(2\theta)$

$= a_{pp} + \sin(\theta)^2 (a_{qq} - a_{pp}) - a_{p,q}\sin(2\theta)$

donc $b_{pp}^k - a_{pp}^k = \sin(\theta)^2 \times \left(-2a_{pq}\frac{\cos(2\theta)}{\sin(2\theta)}\right) - a_{pq}\sin(2\theta)$

$$= -a_{pq}\Bigg(\underbrace{\frac{2\cos(2\theta)\sin(\theta)^2 + \sin(2\theta)^2}{\sin(2\theta)^2}}_{\in[-2;2]}\Bigg)$$

et $|a_{p,q}^k| \leq \|B_k\|_E \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

de même $b_{qq}^k - a_{qq}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

donc $a_{ii}^{k+1} - a_{ii}^k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad \forall i$

donc $\|D_{k+1} - D_k\| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Et (D_k) est bornée car $\|D_k\| \leq \|A_k\| = \|A\|$

Donc d'après le lemme (D_k) converge et sa limite est une des vda déterminées donc de la forme

$\mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(i)})$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Comme $$A_k = \underbrace{D_k}_{\longrightarrow \mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(i)})_i} + \underbrace{B_k}_{\longrightarrow 0} \longrightarrow \mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(i)})_i$$

$$\lim_{k \to +\infty} (A_k) = \mathrm{diag}(\lambda_{\sigma(i)}) \text{ avec } \sigma \in \mathfrak{S}_n.$$

<u>Remarque</u> : si les vp de A sont distinctes alors $(O_k)_k = (\Omega_1 \dots \Omega_k)_k$ converge vers une matrice $O \in \mathcal{O}_n$ dont les colonnes sont les $\overrightarrow{vp}$ associés aux vp.

↳ à approfondir