$Gl_n(\mathbb{C})$ est dense, ouvert et connexe dans $M_n(\mathbb{C})$:

Référence : [Caldero Perronier]

Étapes : ① ouvert : avec le dét

② dense : avec la finitude des valeurs propres

③ connexe : connexité par arcs de $\mathbb{C} \setminus \{z_1 .. z_n\}$ et continuité du dét.

① $\det : M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}$ est une application continue car polynomiale en le coef. de la matrice, et $\mathbb{C}^*$ est un ouvert (complémentaire d'un fermé).
Donc $\det^{-1}(\mathbb{C}^*) = Gl_n(\mathbb{C})$ est <u>ouvert</u>.

② <u>Dense</u> : Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$, on cherche une suite $(A_k)_{k \geq 0}$ de $Gl_n(\mathbb{C})$ telle que $A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} A$

Si $A \in Gl_n(\mathbb{C})$, $(A_k)_{k\geq 0} = (A)_{k \geq 0}$ convient. Sinon :
$\forall k \in \mathbb{N}$ on pose $A_k = A - \frac{1}{k+1} I_n$
$\det(A_k) = 0$ ssi $\frac{1}{k+1}$ est racine de χ_A ssi $\frac{1}{k+1}$ est valeur propre de A.
Comme A a au plus n valeurs propres distinctes, il existe $K \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k \geq K \Rightarrow \frac{1}{k+1} \notin Sp(A))$
On considère alors la suite
$(A_k)_{k \geq K}$ qui est une suite de $Gl_n(\mathbb{C})$ telle que
$A_k \xrightarrow[k \to +\infty]{} A$

③ Mq $Gl_n(\mathbb{C})$ est connexe :
Soient $(A ; B) \in Gl_n(\mathbb{C})$, mq $\exists \gamma : [0,1] \to Gl_n(\mathbb{C})$ tq
$\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = B$
$\forall z \in \mathbb{C}$, $zA + (1-z)B \in Gl_n(\mathbb{C})$ car c'est un e.v.

et si on pose $g : z \in \mathbb{C} \mapsto zA + (1-z)B$

alors $\det \circ g : z \in \mathbb{C} \mapsto \det(zA + (1-z)B)$ est une fonction polynomiale en z donc continue sur $\mathbb{C}$.

comme $(\det \circ g)(0) = \det(B) \neq 0$ $\det \circ g$ est une f^{e} polynômiale non nulle Elle a donc au plus n racines, qu'on note $z_1, \dots, z_r$ avec $r \leq n$.

On sait que $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_r\}$ est connexe par arcs donc $\exists \gamma : [0;1] \to \mathbb{C} \setminus \{z_1; \dots; z_r\}$ continue telle que $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$.

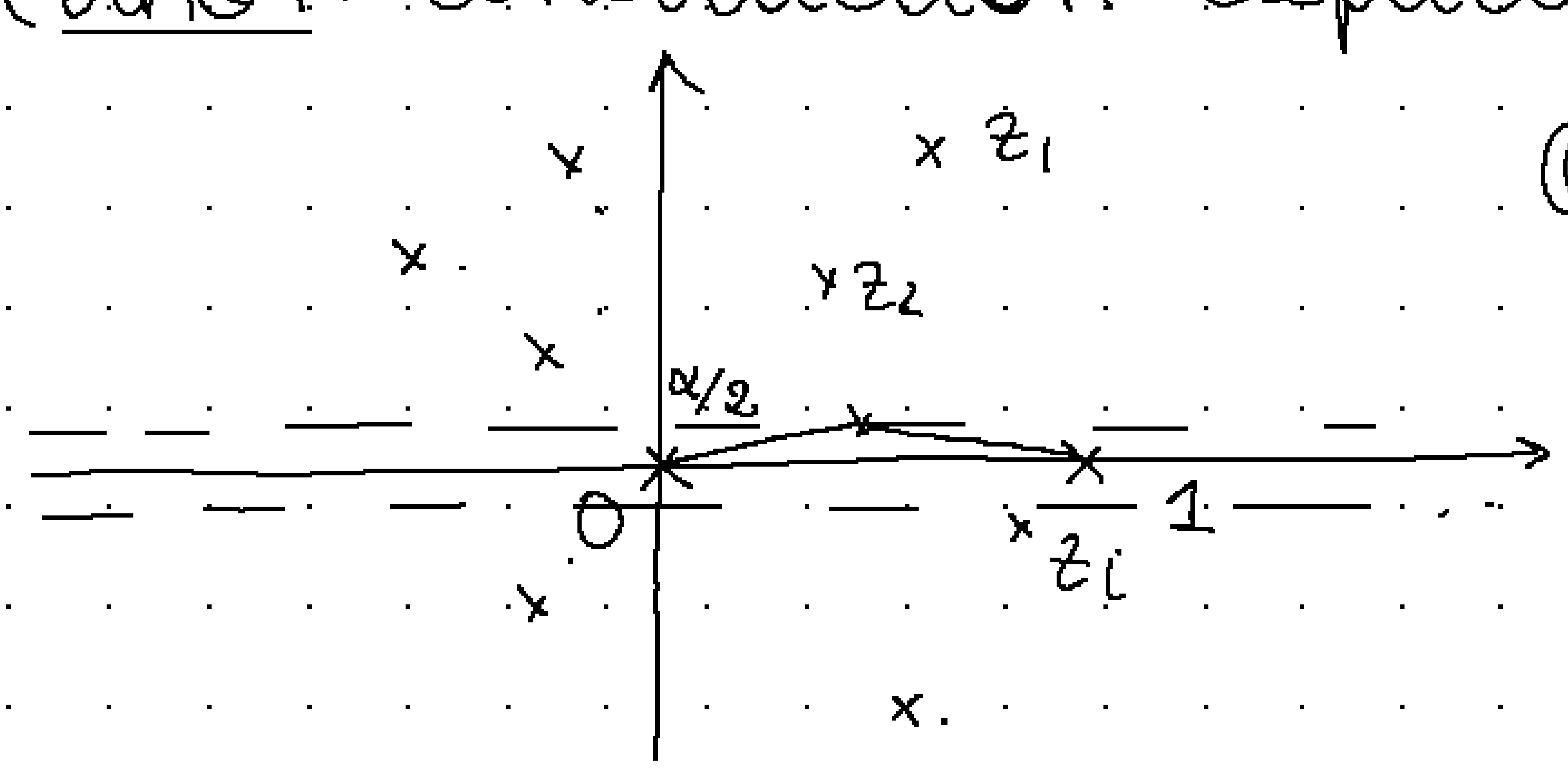
On a alors $\det \circ g \circ \gamma$ une fonction continue qui ne s'annule jamais.

$(g \circ \gamma)(0) = g(0) = B$ et $(g \circ \gamma)(1) = g(1) = A$

et $\forall t \in [0,1]$ $(g \circ \gamma)(t) \in Gl_n(\mathbb{C})$ car $(\det \circ g \circ \gamma)(t) \neq 0$

donc on a bien $Gl_n(\mathbb{C})$ connexe par arcs donc connexe

(Sinon : construction explicite du chemin :



On pose $\alpha = \min\{|\mathrm{Im}(z_i)|$ où z_i est racine de $\det \circ g$, z_i non réel$\}$

Alors pour tout $\beta \in]0; \frac{\alpha}{2}]$, $\forall \delta \in \mathbb{R}$,

$\delta + i\beta$ n'est pas racine de $\det \circ g$.

On pose $\gamma : [0;1] \to \mathbb{C}$

$$t \longmapsto \begin{cases} t + it\alpha & \text{si } t \in [0; \frac{1}{2}] \\ \underbrace{\frac{1}{2} + i\frac{\alpha}{2} + (1 - i\alpha)(t - \frac{1}{2})}_{= t + i\alpha(1-t)} \end{cases}$$

On a alors $\gamma(0) = 0$ et $\gamma(1) = 1$

$\forall t \in]0;1[$ $\gamma(t) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et $\gamma(t)$ n'est pas racine de $\det \circ g$.

Donc $g \circ \gamma : [0;1] \to GL_n(\mathbb{C})$ car $\det \circ g \circ \gamma$ ne s'annule pas sur $[0;1]$.

Applications : $\chi_{AB} = \chi_{BA} \quad \forall (A,B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Par densité de $GL_n(\mathbb{K})$:

Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \det(AB - XI_n)$

$$= \det(A^{-1}(AB - XI_n)A)$$

$$= \det(BA - XI_n) = \chi_{BA}$$

Et on généralise à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par densité et continuité de $\chi : M \longmapsto \chi_M$.