

Fonction Zêta au nombre premiers :

Référence : [Rombaldi 341]

Énoncé : Thm 1 : Formule d'Euler

$$\forall \alpha > 1, \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^\alpha}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Thm 2 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$

Étapes : (E1) Démontrer la formule d'Euler. $\alpha > 0$.

(E2) IP : $n \in \mathbb{N}^* \mapsto \frac{1}{n^\alpha} \cdot \frac{1}{\zeta^\alpha}$

(E3) Pour $p \in \mathbb{N}^*$, $IP(p|\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^\alpha}$ et $IP\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* | p_n \mathbb{N}^*)\right) = \frac{1}{\zeta^\alpha}$

(E4) Conclure

(E5) Mg $\lim_{\alpha \rightarrow 1^+} (\zeta(\alpha)) = +\infty$

(E6) En passant au log, mg $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty$

(E1) Mg IP défini par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad IP(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)} \frac{1}{n^\alpha} \quad IP(\emptyset) = 0$$

est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.

et $\forall p \in \mathbb{N}^*, IP(p|\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^\alpha}$

$$\Delta IP(\mathbb{N}^*) = \int_{\mathbb{N}^*} IP(\{n\}) d\mu(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} IP(\{n\})$$

$$= \frac{1}{\zeta(\alpha)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 1$$

et on définit $\forall A \subset \mathbb{N}^*, IP(A) = \sum_{n \in A} IP(\{n\})$.

$\Delta IP(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{+\infty} IP(A_i)$ grâce à Fubini pour (A_i) une famille d'ensemble 2-à-2 disjoints (+)

Bonc ainsi définie IP est une proba.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, on note $p|\mathbb{N}^* = \{pn \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

$$\begin{aligned} IP(p|\mathbb{N}^*) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\zeta(\alpha)} \sum_{n=1}^N \frac{1}{(np)^\alpha} \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\zeta(\alpha)} \frac{1}{p^\alpha} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^\alpha} \right) = \frac{1}{p^\alpha} \end{aligned}$$

(E2) Mg $IP\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_m \mathbb{N}^*)\right) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$ où p_m est le m -ième nombre premier

Soit $n \in \mathbb{N}^*, (\mathbb{N}^* \setminus p_n \mathbb{N}^*) = \{n \in \mathbb{N}^* \mid p_n \nmid n\}$

donc $\bigcap_{m=1}^N (\mathbb{N}^* \setminus p_m \mathbb{N}^*) = \{n \in \mathbb{N}^* \mid \forall k \in [1; N] \quad p_k \nmid n\}$

donc $\bigcap_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_n \mathbb{N}^*) = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \text{ n'est divisible par aucun nombre premier}\} = \{1\}$

donc $IP\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_n \mathbb{N}^*)\right) = IP(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$

(E3) En déduire que $\forall \alpha > 1 \quad \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_n^\alpha}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$

$\forall m \in \mathbb{N}^*$ on pose $A_m = \bigcap_{k=1}^m (\mathbb{N}^* \setminus p_k \mathbb{N}^*)$

Ainsi définie, $(A_m)_{m \geq 0}$ est une suite décroissante d'événements donc $\bigcap_{k=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_k \mathbb{N}^*) = \bigcap_{m=1}^{+\infty} A_m$

donc $IP\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty} A_m\right) = IP\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} (\mathbb{N}^* \setminus p_k \mathbb{N}^*)\right) = IP(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$ or,

$IP\left(\bigcap_{m=1}^{+\infty} A_m\right) = \lim_{m \rightarrow +\infty} (IP(A_m)) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(IP\left(\bigcap_{k=1}^m (\mathbb{N}^* \setminus p_k \mathbb{N}^*)\right)\right)$

Mq les événements $(\mathbb{N}^* \setminus p_k \mathbb{N}^*)_{k \in [1; n]}$ sont indépendants
 Pour cela on va mq les $(p_k \mathbb{N}^*)_{k \in [1; n]}$ sont indép.
 Soit $I \subset \mathbb{N}^*$ finie,

$\bigcap_{i \in I} p_i \mathbb{N}^* = \text{ppcm}(p_i) \mathbb{N}^*$

et comme les p_i sont premiers entre eux,

$\text{ppcm}(p_i) = \prod_{i \in I} p_i$ donc $\bigcap_{i \in I} p_i \mathbb{N}^* = \left(\prod_{i \in I} p_i\right) \mathbb{N}^*$

donc $IP\left(\bigcap_{i \in I} p_i \mathbb{N}^*\right) = IP\left(\left(\prod_{i \in I} p_i\right) \mathbb{N}^*\right) = \frac{1}{\left(\prod_{i \in I} p_i\right)^\alpha} = \prod_{i \in I} \frac{1}{p_i^\alpha}$

Bonc $IP(\bigcap_{i \in I} p_i | N^*) = \prod_{i \in I} IP(p_i | N^*)$ d'où l'indépendance.

Bonc comme $(p_k | N^*)_{k \geq 1}$ est une famille d'événements indépendants, il en va de même pour $(N^* | p_k | N^*)_{k \geq 1}$.

$$\text{Bonc } IP\left(\bigcap_{k=1}^m (N^* | p_k | N^*)\right) = \prod_{k=1}^m IP(N^* | p_k | N^*)$$
$$= \prod_{k=1}^m (1 - IP(p_k | N^*))$$

$$= \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)$$

$$\text{Bonc } IP\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right) = \frac{1}{\zeta(\alpha)}$$

$$\text{Bonc } \zeta(\alpha) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)}$$

□

(E4) Mg $\zeta(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^+} +\infty$

on veut minorer $\zeta(\alpha)$ par qqch qui $\xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^+} +\infty$

on va donc chercher à minorer $\zeta(\alpha)$ par $\sum \frac{1}{n}$.

$$\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \sum_{k=M+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} + \sum_{k=1}^M \frac{1}{k^\alpha}$$
$$= \underbrace{\sum_{k=M+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}}_{\geq 0} + \sum_{k=1}^M \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^\alpha} \right)$$

$$\geq \sum_{k=1}^M \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^M \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^\alpha} \right)$$

Soit $M > 0$, Mg $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \alpha \in]1, 1 + \varepsilon[$, $\zeta(\alpha) \geq M$.

comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}$

$$(n \geq N \Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq 2M)$$

Soit $n \geq N$, $\forall k \in [1, n]$ $\frac{1}{k} - \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^+} 0$

donc $\exists \varepsilon > 1$ tel que $\forall \alpha \in]1, 1 + \varepsilon[$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k^\alpha} \leq M$

$$\text{donc } - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^\alpha} \right) \geq -M$$

$$\text{donc si } \alpha \in]1, 1 + \varepsilon[, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^\alpha} \right) \geq M$$

d'où $\zeta(\alpha) \geq M$. D'où $\zeta(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^+} +\infty$

$$\textcircled{\text{ES}} \text{ Mg } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{f_n} = +\infty:$$

$$\ln(\zeta(\alpha)) = \ln \left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - \frac{1}{f_n^\alpha}} \right) \right)$$

$$\text{L'ordre de } \ln \nearrow = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - \frac{1}{f_n^\alpha}} \right) \right)$$

$$= - \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{1}{f_n^\alpha} \right)$$

or $\zeta(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^+} +\infty$, donc $\ln(\zeta(\alpha)) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^+} +\infty$ (comp des limites)

donc $\forall M \in \mathbb{R}^+$, $\exists \eta > 0$, $\forall \alpha \in]1, 1+\eta[$, $\ln(\zeta(\alpha)) \geq 2M$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \alpha > 1, 1 > \frac{1}{p_n} \geq \frac{1}{p_n^\alpha} > 0$$

$$\text{donc } 0 < 1 - \frac{1}{p_n} \leq 1 - \frac{1}{p_n^\alpha} \leq 1$$

$$\text{donc } -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right) \geq -\ln\left(1 - \frac{1}{p_n^\alpha}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \sum_{k=1}^n \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\right) &\geq \sum_{k=1}^n -\ln\left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right) \\ &\geq \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} -\ln\left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)}_{\ln(\zeta(\alpha))} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} \underbrace{\ln\left(1 - \frac{1}{p_k^\alpha}\right)}_{\leq 0 \forall k} \geq -M)$$

$$\text{donc si } n \geq N, \sum_{k=1}^n \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\right) \geq M$$

$$\text{donc } \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right)\right) = +\infty$$

Et comme $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \underset{p_k \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p_k}$, par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{p_n} = +\infty$. $\square$

Gaudon p. 302:

Étude un peu plus approfondie de ζ

a) $\forall s > 1, \zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$

Mq ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$ et exprimer ses dérivées

dérivation sous $\int$ pour la mesure de comptage:

i) $\forall \varepsilon \in [1, +\infty[, n \mapsto \frac{1}{n^s}$ est intégrable sur $\mathbb{N}^*$

ii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in [1, +\infty[, s \mapsto \frac{1}{n^s} = e^{-s \ln(n)}$ est

$\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ de dérivée $s \mapsto \frac{-\ln(n)}{n^s}$

iii) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in [1, +\infty[, \left| \frac{\ln(n)}{n^s} \right| \leq \frac{\ln(n)}{n^{1+\varepsilon}}$

Mq $\sum_{n \geq 1} \frac{-\ln(n)}{n^{1+\varepsilon}}$ est bien convergente

$$\frac{\ln(n)}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}} = \frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}} \times \underbrace{\frac{\ln(n)}{n^{\frac{\varepsilon}{2}}}}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} = o\left(\underbrace{\frac{1}{n^{1+\frac{\varepsilon}{2}}}}_{\text{terme général positif d'une série convergente}}\right) (*)$$

donc par comparaison, $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n)}{n^{1+\varepsilon}}$ converge

Bonc par le théorème de dérivation sous le signe $\sum$,

$\zeta : s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[\forall \varepsilon > 0$

donc $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et $\forall \varepsilon \in]1, +\infty[\zeta'(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln(n)}{n^s}$

par récurrence, on mq ζ est $\mathcal{C}^\infty$ $\zeta^{(p)}(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^p \ln^p(n)}{n^s}$
(avec le même arg^t qu'en (*) pour la cyc^e de la série)

b) on a montré $\zeta(\alpha) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 100} 0$

mq $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$ où γ désigne la constante d'Euler.

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

Rq: $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty \rightarrow$ Il y a beaucoup de

nombre premiers, il y en a plus que de carrés
car $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$.

$$P(\cup A_k) = \sum P(A_k)$$

$A = \cup_{k \in \mathbb{N}} A_k$, A_k 2-à-2 disjoints

$$\text{Mq } P(A) = \sum_{m \in A} \alpha_m = \sum_k \sum_{m \in A_k} \alpha_m$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{m \in A} \alpha_m = \sum_{m \in \mathbb{N}} \alpha_m \mathbb{1}_A = \sum_{m \in \mathbb{N}} \alpha_m \sum_k \mathbb{1}_{A_k} \\ &= \sum_k \mathbb{1}_{A_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m \in \mathbb{N}} \alpha_m \mathbb{1}_{A_k} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{m \in A_k} \alpha_m \\ \text{Fubini} \end{aligned}$$