

Équivalence des normes en dimension finie et théorème de compacité de Riesz :

Référence : [Zenmann] [Goulden] [Dantzer]

Énoncé : Soit E un $\mathbb{R}$ -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$B = (e_1 \dots e_n)$ une base de E . On munit E de la norme
infinie $\|\cdot\|_\infty : x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E \mapsto \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Théorème 1 : Dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$, $A \subset E$ est compacte ssi
 A est fermée bornée.

Théorème 2 : Sur E , toutes les normes sont équivalentes.

Théorème 3 : [Riesz] Un evn $(E, \|\cdot\|)$ est de dimension
finie ssi sa boule unité fermée est compacte.

(EI) Thm 1 : $\Rightarrow$

Soit A une partie compacte de $(E, \|\cdot\|_\infty)$, de dim $n \in \mathbb{N}^*$.
Mq elle est fermée et bornée.

▷ fermée : soit $(x_k)_{k \geq 0}$ une suite d'éléments de A convergente dans E . Comme A est compact, il existe une sous-suite $(x_{\varphi(k)})_{k \geq 0}$ convergente dans A .
Ainsi $(x_k)_{k \geq 0}$, convergente, a une vda $a \in A$, donc
 $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} a \in A$ donc A est fermée.

▷ bornée : par contraposée. Supposons A non-bornée.
Alors, soit $x_0 \in A$, $\forall k \in \mathbb{N}^* \exists x_k \in A$ tq $\|x_k - a\| \geq \|x_{k-1} - a\| + 1$.
Ainsi on construit une suite tq $\forall m \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*$
 $\|x_{m+p} - x_m\| \geq \|x_{m+p} - a\| - \|x_m - a\|$
donc $\|x_{m+p} - x_m\| \geq \|x_{m+p-1} - a\| + 1 - \|x_m - a\|$
 $\geq \|x_m - a\| + p - \|x_m - a\| \geq p \geq 1$

donc en particulier x_m n'a pas de valeur d'adhérence
car deux éléments sont toujours distants de 1 au moins.

$\Leftarrow$ Soit $A \subseteq E$ une partie fermée bornée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

Alors $\exists M > 0$ tq $\forall a \in A \ \|a\|_\infty \leq M$.

Soit $(a_k)_{k \geq 0}$ une suite de E . $\forall k \in \mathbb{N}$ on note

$(a_k^i)_{1 \leq i \leq n}$ les composantes de a_k dans la base B .

$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, (a_k^i) est une suite réelle bornée donc on peut en extraire une sous-suite convergente.

Ainsi $(a_{\varphi(k)})$ est une suite vectorielle dont la suite des coordonnées sur e_i converge.

De proche en proche on fait alors converger $(a_{\varphi(k)})$.

Comme A est fermé, $(a_{\varphi(k)})$ converge dans A , ce qui prouve alors que A est compact.

② Théorème 2

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E , on va mq elle est équivalente à $\|\cdot\|_\infty$ sur E .

Soit $x \in E$, $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$.

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i e_i\| = \sum_{i=1}^n |x_i| \|e_i\|$$

$$\text{Donc } \|x\| \leq \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} (|x_i|) \underbrace{\sum_{i=1}^n \|e_i\|}_{= C_1 > 0}$$

Ainsi, $\exists C_1 > 0$ tq $\forall x \in E$ $\|x\| \leq C_1 \|x\|_\infty$.

Mq $\exists C_2 > 0$ tq $\forall x \in E$ $\|x\| \geq C_2 \|x\|_\infty$.

$\|\cdot\| : x \in E \rightarrow \|x\|$ est continue (car Lipschitzienne)

pour $\|\cdot\|_\infty$ ($\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| \leq C_2 \|x - y\|_\infty$)

Donc sur $\mathcal{S}_2 = \{x \in E \mid \|x\|_\infty = 1\}$ qui est compact, elle est bornée et atteint ses bornes.

Ainsi, $\exists C_2 > 0 \quad \forall x \in \mathcal{I}_1, \|x\| \geq C_2$

Soit $x \in E, x \neq 0 \quad \frac{x}{\|x\|_\infty} \in \mathcal{I}_1$ donc $\left\| \frac{x}{\|x\|_\infty} \right\| \geq C_2$

Donc $\|x\| \geq C_2 \|x\|_\infty$. Ceci reste vrai pour $x=0$.

Conclusion, $\exists C_1, C_2 > 0 \quad \forall x \in E, C_2 \|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C_1 \|x\|_\infty$

(E3) Théorème 3

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn.

$(E, \|\cdot\|)$ est de dimension finie ssi sa boule unité fermée est compacte.

$\Rightarrow$ La boule unité fermée de $(E, \|\cdot\|)$ est fermée et bornée pour $\|\cdot\|$ donc elle l'est également pour $\|\cdot\|_\infty$ donc elle est compacte pour $\|\cdot\|_\infty$ donc elle est compacte pour $\|\cdot\|$.

$\Leftarrow$ On va montrer le résultat par contraposée.

Supposons $(E, \|\cdot\|)$ de dimension infinie. On note B sa boule unité fermée.

Soit $(B(x_j; \frac{1}{2}))_{j \in \mathbb{N}}$, qui est un recouvrement d'ouverts de B .

Soit $J \subset \mathbb{N}$ une partie finie. On note $J = \{x_1, \dots, x_p\}$

Ng $B \not\subset \bigcup_{j \in J} B(x_j; \frac{1}{2})$

On pose $F = \text{Vect}(\{x_1, \dots, x_n\})$, F est de dimension

finie donc il est fermé.

Preuve: $F \subset E$. $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ alors F fermé/complet

Soit (x_k) une suite de F convergente vers $x \in E$, alors

(x_k) est une suite de Cauchy pour $\|\cdot\|$ dans E .

Alors comme $\exists C_1 > 0$ $\|x\|_\infty \leq C_1 \|x\|$, (x_k) est

de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$. Donc en particulier les suites

de coordonnées (réelles) sont bornées. On peut

alors faire converger une sous-suite coordonnée par

coordonnée. $x_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y = \sum_{i=1}^n x_i e_i \in F$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

(x_k) est de Cauchy donc elle cv vers y pour $\|\cdot\|_\infty$.

Donc comme $\exists C_2 > 0$ $\|x\| \leq C_2 \|x\|_\infty$, $x_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} y \in F$

pour $\|\cdot\|$. Donc $y = x \in F$. Donc F est fermé/

complet (en supposant (x_k) simplement de Cauchy).

Alors on prend $x \in E \setminus F$. $d(x, F) = d > 0$ car $x \notin F$

et F est fermé. Soit $y \in F$ tel que $0 < \|x - y\| \leq \frac{3d}{2}$.

On pose alors $x_0 = \frac{x - y}{\|x - y\|} \in B$.

Soit $j \in J$, $\|x_0 - x_j\| = \left\| \frac{x - y}{\|x - y\|} - x_j \right\| = \frac{1}{\|x - y\|} \underbrace{\|x - y - \|x - y\| x_j\|}_{\in F}$

Donc $\|x_0 - x_j\| \geq \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ donc $x_0 \notin B(x_j; \frac{1}{2}) \geq d$

Donc $x_0 \notin \bigcup_{j \in J} B(x_j, \frac{1}{2})$

Donc $B \not\subset \bigcup_{j \in J} B(x_j, \frac{1}{2})$

Donc B n'est pas compact.