

Equation de Sylvester:

Référence: Gouidon Analyse P410

Énoncé: Lemme 1: Dans $M_n(\mathbb{C})$, si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A , $\text{Sp}(D) = \text{Sp}(A)$.

Lemme 2: Si $A \in M_n(\mathbb{C})$ est telle que $\forall \lambda \in \text{Sp}(A)$,

$\text{Re}(\lambda) < 0$ alors si $\|\cdot\|$ est une norme d'algèbre, il existe $\alpha > 0$, $K > 0$ telle que $\forall t \geq 0$ $\|e^{tA}\| \leq K e^{-\alpha t}$

Théorème: L'unique solution de l'équation

$C = AX + BX$ où A, B et C sont dans $M_n(\mathbb{R})$ et telles que toutes les valeurs propres de A et B sont $\text{Re}(\lambda) < 0$ est: $X = - \int_0^\infty e^{tA} C e^{tB} dt$

Étapes:

(E1) Lemme 1 (trigo simultanée)

(E2) Lemme 2 $M_n \quad e^{-\frac{\alpha}{2}t} e^{tN} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

(E3) Thm. - Existence

$\{ Y' = AY + YB \quad Y(0) = C \}$ a une uniq sol $Y = e^{tA} C e^{tB}$

Intégrer pour trouver la sol. X avec lemme 2

(E4) Unicité: $M_n \quad \phi: X \mapsto AX + XB$ est un isomorphisme.

Lemme 1: Soit $A = D + N$ la décomposition de Dunford de $A \in M_n(\mathbb{C})$. $N \in M_n(\mathbb{C})$ donc N est trigonalisable.

Comme D et N commutent et qu'elles sont trigonalisables, alors il existe une base commune de trigonalisation. Ainsi, $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}DP$ et $P^{-1}NP$ soient triangulaires supérieures. Les coef. diagonaux de N sont des zéros car elle est nilpotente et ceux de D sont ses valeurs propres $\mu_1, \dots, \mu_n$.

Dans cette base $P^{-1}AP$ est également triangulaire car $P^{-1}AP = P^{-1}DP + P^{-1}NP$. Donc les coef. diagonaux de $P^{-1}AP$ sont $\mu_1, \dots, \mu_n$, qui sont donc dans $\text{Sp}(A)$. On en conclut que A et D ont les mêmes valeurs propres.

Lemme 2: $A \in M_n(\mathbb{C})$ donc χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$.

Donc il existe D diagonalisable et N nilpotente telles que $A = D + N$ et D et N commutent. On peut alors écrire $\forall t \geq 0 \quad e^{tA} = e^{tD} e^{tN}$.

D étant diagonalisable, il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $D = Q \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} Q^{-1}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \text{Sp}(A)$ par le 1^{er}

Lemme.

D'autre part, en notant q l'indice de nilpotence de N , pour tout $t \geq 0$ $e^{tN} = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{(tN)^k}{k!}$
 $\forall t \geq 0$ $\|e^{tA}\| = \|e^{tD}\| \|e^{tN}\|$

Pour ailleurs, les normes étant toutes équivalentes en dimension finie, il existe $K_1 > 0$ telle que $\forall t \geq 0$,
 $\|e^{tD}\| = \left\| \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \right\| \|Q^{-1}\| \|Q\| \leq \underbrace{K_1 \|Q^{-1}\| \|Q\|}_{= K_2} \left\| \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \right\|_{\infty}$

$$\leq K_2 \max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} (|e^{t\lambda_i}|)$$

$$\leq K_2 e^{-tc}$$

$$\text{où } -c = \max_{\lambda \in \text{Sp}(A)} (\text{Re}(\lambda)) \quad (c > 0)$$

$$\text{et } e^{tN} = I_n + tN + \dots + \frac{t^{q-1} N^{q-1}}{(q-1)!}$$

$$\text{Donc } e^{-\frac{c}{2}t} e^{tN} = e^{-\frac{c}{2}t} I_n + t e^{-\frac{c}{2}t} N + \dots + t^{q-1} e^{-\frac{c}{2}t} \frac{N^{q-1}}{(q-1)!} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

donc $t \mapsto e^{-\frac{c}{2}t} e^{tN}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+$ ($t \mapsto e^{tN}$ est un polynôme en t et $t \mapsto e^{-\frac{c}{2}t}$ une exp.), elle est

bornée donc $\exists M \in \mathbb{R}$ telle que $\forall t \geq 0$ $\|e^{-\frac{c}{2}t} e^{tN}\| \leq M$

$$\text{Donc } \forall t \geq 0 \quad \|e^{tN}\| \leq M e^{\frac{c}{2}t} \quad \text{on pose } K_3 = MK_2$$

$$\text{Donc finalement } \forall t \geq 0, \quad \|e^{tA}\| \leq K_3 e^{-\frac{tc}{2}}$$

Théorème: (E) Existence

Soient $(A, B) \in M_n(\mathbb{R})^2$, soit $C \in M_n(\mathbb{R})$. Le problème

$$\begin{cases} (1) Y' = AY + YB \\ (2) Y(0) = C \end{cases} \quad \text{est un problème de Cauchy}$$

qui admet une unique solution globale sur $\mathbb{R}$.

Or $Y: t \in \mathbb{R} \mapsto e^{tA} C e^{tB}$ est solution (car e^{tA} et B commutent). C'est donc la solution globale.

Comme Y est $\mathcal{C}^1$ elle est en particulier continue

donc on peut intégrer l'équation (1) entre 0 et $t \in \mathbb{R}_+$

$$Y(t) - Y(0) = A \int_0^t Y(s) ds + \int_0^t Y(s) ds B \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{or } \|Y(t)\| &= \|e^{tA} C e^{tB}\| \leq \|e^{tA}\| \|C\| \|e^{tB}\| \\ &\leq K_A e^{-\alpha_A t} \|C\| K_B e^{-\alpha_B t} \\ &\leq K e^{-\alpha t} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|Y(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\text{et } \left\| \int_0^t Y(s) ds \right\| \leq \int_0^t \|Y(s)\| ds \leq \int_0^t K e^{-\alpha s} ds < +\infty$$

converge (car converge absolument).

Ainsi dans (*), quand $t \rightarrow +\infty$ on a alors

$$-C = A \int_0^{+\infty} Y(s) ds + \int_0^{+\infty} Y(s) ds B$$

D'où $X = - \int_0^{+\infty} Y(s) ds$ est solution de (E).

unicité: l'endomorphisme

$\Phi: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow M_n(\mathbb{R})$ est surjectif. On a montré

$$X \mapsto AX + XB$$

à l'étape 2. l'existence d'une solution pour tout $C \in M_n(\mathbb{R})$. Or par le thm du rang.

$$\dim(\ker(\Phi)) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(\Phi))}_{= M_n(\mathbb{R})} = \dim(M_n(\mathbb{R})).$$

donc $\ker(\Phi) = \{0\}$, et chaque solution est unique.