

Equation de la chaleur par les séries de Fourier:

Référence: [Zemmann][Bernis][Allaire][Berthelin]

Enoncé: Soit $u_0 \in L^2([0, 2\pi])$, dont on note d_n les coeffs de Fourier pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Il existe une unique fonction $u: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que:

(i) à $t > 0$ fixé, $u(t, \cdot)$ est 2π -périodique

(ii) les fonctions $\partial_t u$ et $\Delta_x u$ sont bien définies et continues sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

(iii) sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\partial_t u = \Delta_x u$

(iv) $u(t, \cdot)$ converge en norme $L^2([0, 2\pi])$ vers u_0 lorsque t tend vers 0.

De plus, u est alors $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Étapes: Analyse: si u vérifie les 4 points, donner une expression de u . 1) $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(t) e^{inx}$

2) $c_n'(t) = -n^2 c_n(t)$, ce qui donne $c_n(t) = d_n e^{-n^2 t}$

où $d_n = c_n(u_0)$.

Synthèse: prendre $u(t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ et mq elle vérifie les 4 points

i) ok ii) Mq u est $\mathcal{C}^\infty$ avec le thm de dérivation des séries de fonctions, donne iii) puis iv) avec le TCD.

(E0) : retrouver l'équation de la chaleur :



Θ : quantité de chaleur qu'on prendra proportionnel à la température T

$\Theta = c \times T$ où c est une constante physique

appelée chaleur spécifique.

En notant f les sources de chaleur dans le volume

V , q le vecteur flux de chaleur, n la normale sortante

à $\partial\Omega$ alors on a la variation de chaleur :

$$C(t+\delta t) = C(t) - \left(\int_{\partial V} q \cdot n \, dv \right) \delta t + \left(\int_V f \, dv \right) \delta t$$

$$\text{donc } \frac{C(t+\delta t) - C(t)}{\delta t} = - \int_{\partial V} q \cdot n \, dv + \int_V f \, dv$$

$$\text{donc } \frac{d}{dt} (C) = \frac{d}{dt} \int_V cT \, dv \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{modé, pas justifié}}}{=} \int_V c \frac{\partial T}{\partial t} \, dv = - \int_{\partial V} q \cdot n \, dv + \int_V f \, dv$$

En appliquant le théorème de Gauss $\int_{\partial V} q \cdot n \, ds = \int_V \text{div}(q) \, dv$

$$\text{Alors on a, en admettant } \frac{d}{dt} \left(\int_V cT \, dv \right) = \int_V \frac{d}{dt} (cT) \, dv$$

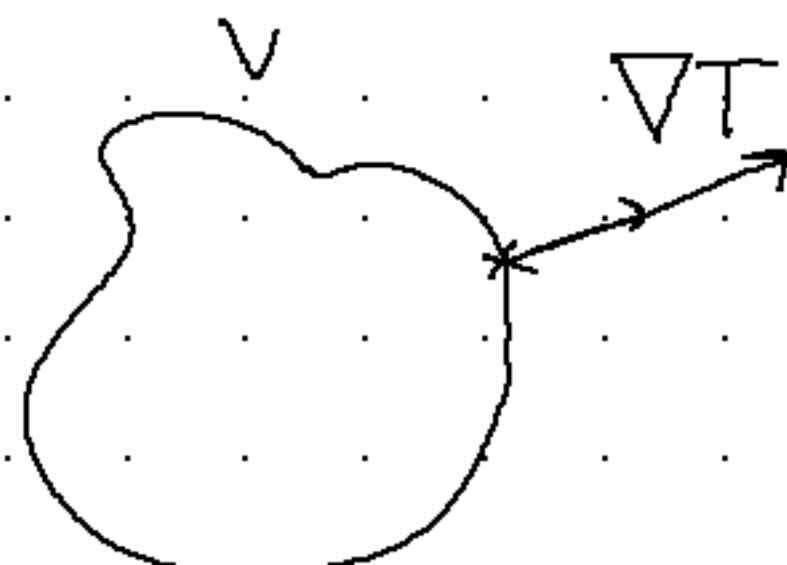
$\forall V \subset \Omega$,

$$\int_V \left(\frac{d}{dt} (cT) + \text{div}(q) \right) dv = \int_V f \, dv$$

Comme le résultat est $\forall V \subset \Omega$, on en conclut

$$\frac{d}{dt} (cT) + \text{div}(q) = f$$

Et on choisit $q = -k \nabla T$

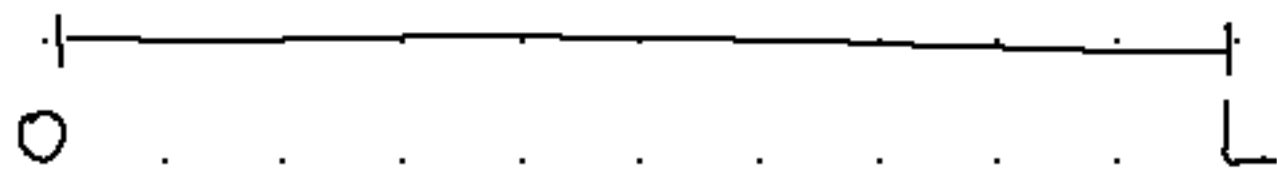


Donc $\frac{d}{dt}(cT) - k \operatorname{div}(\nabla T) = f$

et $\Delta T = \operatorname{div}(\nabla T) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}$

donc en dimension 1,

$$\frac{dT}{dt} - \frac{k}{c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = f$$



et en prenant les conditions de Dirichlet

$$T(t; 0) = T(t; L) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+$$

et $T(0; x) = T_0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

on a le pb suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - \frac{k}{c} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f & \text{sur } \mathbb{R}_+ \times]0; L[\\ u(t; 0) = u(t; L) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}_+ \\ u(0; x) = u_0(x) & \text{sur }]0; L[\end{cases}$$

[Berthelin P 433] en cherchant des sol^e sous la forme

$$u(t; x) = f(t)g(x) \text{ on trouve } u(t; x) = b_k e^{\frac{-k^2 \pi^2 t}{L^2}} \sin\left(\frac{k\pi}{L} x\right)$$

Ceci nous pousse alors à chercher des solutions L -périodiques

Donc au lieu de L on prend 2π et on cherche des solutions 2π -périodiques.

(E1) Analyse : Soit u une solution de P qui vérifie les 4 points du théorème.

$\forall t \in \mathbb{R}_+^*$, $u(t; \cdot) : x \in \mathbb{R} \mapsto u(t; x)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc $\mathcal{C}^1$

et 2π -périodique. Donc par le théorème de Dirichlet [Dantzer p. 401]:

$$\forall x \in \mathbb{R}, u(t; x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(u(t; \cdot)) e^{inx} \quad (*)$$

On note $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $c_n(t) = c_n(u(t; \cdot))$ et on cherche à en obtenir une expression.

Comme $u(t; \cdot)$ est 2π -périodique et continue sur $[0; 2\pi]$, elle y est intégrable et on peut définir pour $n \in \mathbb{Z}$ son n -ième coef. de Fourier: $c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t; x) e^{-inx} dx$

on va chercher à dériver $c_n: t \mapsto c_n(t)$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Soit $I = [a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$.

on définit $f_I: [0; 2\pi] \times I \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x; t) \mapsto \frac{1}{2\pi} u(t; x) e^{-inx}$$

on vérifie les hypothèses du thm de dérivation sous $\int$

i) $\forall t \in I$, $f_I(t; \cdot): x \mapsto \frac{1}{2\pi} u(t; x) e^{-inx}$ est intégrable car continue sur $[0; 2\pi]$

ii) $\forall x \in [0; 2\pi]$, $f_I(\cdot; x): t \mapsto \frac{1}{2\pi} u(t; x) e^{-inx}$ est $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall t \in I$, $\frac{\partial f_I(\cdot; x)}{\partial t}(t) = \frac{e^{-inx}}{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t; x)$.

iii) $\forall x \in [0; 2\pi]$, $\forall t \in I$, $\left| \frac{\partial f_I(\cdot; x)}{\partial t} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(t; x) \right|$

constante donc
intégrable sur $[0; 2\pi]$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{(t; x) \in I \times [0; 2\pi]} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial t}(t; x) \right| \right)$$

donc par le théorème de dérivation sous le signe

intégral, $c_n: t \mapsto \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(t; x) e^{-inx} dx$ est bien définie
et $\mathcal{C}^1$ sur I , et $\forall t \in I$, $c_n'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial t}(t; x) e^{-inx} dx$

Bonc comme $\forall (t; x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ $\frac{\partial u}{\partial t}(t; x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t; x)$,

$$\forall t \in I, c_n'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t; x) e^{-inx} dx$$

Bonc avec une IPP, soit $t \in I$,

$$c_n'(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x}(t; x) e^{-inx} \right]_0^{2\pi}}_{=0 \text{ car } u \text{ } 2\pi\text{-périodique}} - \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x}(t; x) (-in) e^{-inx} dx \right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(- \underbrace{\left[u(t; x) (-in) e^{-inx} \right]_0^{2\pi}}_{=0 \text{ car } u \text{ } 2\pi\text{-périodique}} + \int_0^{2\pi} u(t; x) (in)^2 e^{-inx} dx \right)$$

$$= -n^2 c_n(t).$$

Bonc $\forall t \in I$ $c_n'(t) = -n^2 c_n(t)$

Bonc $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $c_n'(t) = -n^2 c_n(t)$

Bonc $\exists \alpha_n \in \mathbb{R}$ tq $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $c_n(t) = \alpha_n e^{-n^2 t}$

Il nous reste alors à déterminer les α_n pour $n \in \mathbb{N}^*$

On sait par (*) que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$

$$u(x; t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n e^{-n^2 t} e^{inx}$$

on utilise alors l'hypothèse (iv) $u(t; \cdot)$ converge en norme $L^2([0; 2\pi])$ vers u_0 lorsque $t \rightarrow 0$.

$$\|u(t; \cdot) - u_0\|_2^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

Or comme $u(t; \cdot) \in L^2([0; 2\pi])$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ et $u_0 \in L^2([0; 2\pi])$, donc par Parseval,

$$\|u(t; \cdot) - u_0\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\underbrace{c_n(t) - c_n(u_0)}_{d_n}| \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$$

$\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} c_n(u_0)$, donc $\forall n \in \mathbb{Z}$ $d_n e^{-n^2 t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} d_n$
donc $\forall n \in \mathbb{Z}$, $d_n = d_n$

Donc $\forall x \in [0; 2\pi]$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $u(t; x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{-n^2 t} e^{inx}$

Donc si u vérifie les points i) à iv) u a cette tête, d'où l'unicité.

(E2) Synthèse on pose $u: \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$
 $(t; x) \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{-n^2 t} e^{inx}$

$$\forall (t; x) \in (\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}), u(t; x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(d_n e^{inx} + d_{-n} e^{-inx})}_{\in \mathbb{R}} e^{inx}$$

donc u est à valeurs dans $\mathbb{R}$. $\in \mathbb{R}$ car u_0 à vals $\mathbb{R}$

Montrons alors que u vérifie les quatre hypothèses du théorème.

(i) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$, $u(t; \cdot): x \mapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{-n^2 t} e^{inx}$ est 2π -périodique.

(ii) Mg u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$

Soit $n \in \mathbb{Z}$

Soit $t_0 > 0$, $u_n: [t_0; +\infty[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur

$$(t, x) \mapsto d_n e^{-n^2 t} e^{inx}$$

$[t_0; +\infty[\times \mathbb{R}$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2$, $\forall (t, x) \in [t_0; +\infty[\times \mathbb{R}$

$$\left| \frac{\partial^{a+b} u_n}{\partial t^a \partial x^b} (t, x) \right| = |d_n| |n|^{2a} \underbrace{e^{-n^2 t}}_{\leq e^{-n^2 t_0}} |n|^b$$

Comme $\|u_0\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_n|^2$ par Parseval, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $|d_n| \leq \|u_0\|_2$

$$\text{Donc } \left| \frac{\partial^{a+b} u_n}{\partial t^a \partial x^b} (t, x) \right| \leq \|u_0\|_2 |n|^{2a+b} e^{-n^2 t_0}$$

$$\text{et } |n|^2 (|n|^{2a+b} e^{-n^2 t_0}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ donc } \|u_0\|_2 |n|^{2a+b} e^{-n^2 t_0} = o\left(\frac{1}{|n|^2}\right)$$

donc la série de terme général $\|u_0\|_2 |n|^{2a+b} e^{-n^2 t_0}$ converge

donc $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{\partial^{a+b} u_n}{\partial t^a \partial x^b} (t, x)$ converge normalement donc

par le théorème de dérivation des séries de fonctions, $\frac{\partial^{a+b} u}{\partial t^a \partial x^b}$ existe et est continue sur

$[t_0; +\infty[\times \mathbb{R}$ donc comme ce résultat est valable

$\forall t_0 > 0$ et $\forall (a, b) \in \mathbb{N}^2$ donc u est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[\times \mathbb{R}$

Noté en particulier ii)

iii) Mg $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ Par ce qui précède,

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} (t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n (-n^2) e^{-n^2 t} e^{inx}$$

$$\text{et } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} (t, x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n (in)^2 e^{-n^2 t} e^{inx} = \frac{\partial u}{\partial t} (t, x)$$

iv) il reste à mq. $u(t; \cdot)$ converge en norme $L^2([0; 2\pi])$ vers u_0 lorsque t tend vers 0.

Soit $t \in \mathbb{R}^*$, $u(t; \cdot) \in L^2([0; 2\pi])$, $u_0 \in L^2([0; 2\pi])$.

donc $u(t; \cdot) - u_0 \in L^2([0; 2\pi])$ et

$$\|u(t; \cdot) - u_0\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(t) - d_n|^2$$

$$c_n(t) = d_n e^{-n^2 t} \quad (c_n(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (d_k e^{-k^2 t} e^{ikx}) e^{-inx} dx + \text{Fubini } c_n(t) = d_n e^{-n^2 t})$$

$$\text{donc } \|u(t; \cdot) - u_0\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_n|^2 \underbrace{|e^{-n^2 t} - 1|^2}_{= v_t(n)}.$$

Soit $(t_k)_{k \geq 0}$ une suite telle que $t_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$.

on veut appliquer le thm de convergence dominée

$$\text{à } v_k : n \in \mathbb{Z} \mapsto |d_n|^2 |e^{-n^2 t_k} - 1|^2$$

$$i) \text{ Soit } n \in \mathbb{Z}, v_k(n) = |d_n|^2 |e^{-n^2 t_k} - 1|^2 \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$ii) \text{ Soit } n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}, |v_k(n)| \leq |d_n|^2 \text{ intégrable sur } \mathbb{Z}.$$

Donc par le thm de convergence dominée,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lim_{k \rightarrow +\infty} (v_k(n)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} v_k(n) \right)$$

$$\text{Donc } 0 = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_n|^2 |e^{-n^2 t_k} - 1|^2 \right)$$

Ainsi, par caractérisation séquentielle de la limite,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |d_n|^2 |e^{-n^2 t} - 1|^2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \text{ d'où } \|u(t; \cdot) - u_0\|_2 \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad \square$$

Questions / remarques :

- doit un peu long. Il faut être prête à aller plus vite sur la partie synthèse.