

Enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

Théorème : l'enveloppe convexe de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est la boule unité de $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$

Idee de la preuve : utiliser la contraposée du thm de séparation des convexes.

Étape 1 : $B_1 = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \|M\|_2 \leq 1\}$. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \subseteq B_1$.

Étape 2 : on veut vérifier les hyp du thm de sép. convexes

2.1. $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact

2.2. Lemme 1 : $\text{Conv}(\text{Compact})$ est compact

↳ preuve avec thm Carathéodory.

Conclusion : $\text{Conv}(\mathcal{O}_n(\mathbb{R})) = \mathcal{C}$ est compact et convexe

Étape 3 : contraposée de sép. des convexes : $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$\forall \varphi \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))^*$, $\varphi(M) \leq \sup_{N \in \mathcal{C}} \varphi(N)$

3.1. Lemme 2 : "thm de Riesz" + $\langle A; B \rangle = \text{Tr}({}^t B A)$

3.2. Reformulation étape 3 en prod scalaire

3.3. Thm de décomposition polaire + thm spectral

3.4. Conclusion

Étape 1: $\text{Conv}(\text{On}(\mathbb{R})) \subseteq B_1 = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \|M\|_2 \leq 1\}$

Soit $O \in \text{On}(\mathbb{R})$, $\|O\|_2 = \sup_{X \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{\|OX\|_2}{\|X\|_2} \right) = 1$ car O conserve la norme euclidienne.
Donc $\|O\|_2 = 1$ Donc $O \in B_1$.
Comme B_1 est convexe $\text{Conv}(\text{On}(\mathbb{R})) \subseteq B_1$. $\square$

Étape 2: 2.1. $\text{On}(\mathbb{R})$ est compact [Prop 7.73 p 328 Spz]

Preuve: $\text{On}(\mathbb{R}) \subset B(0, 1)_{(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)}$ car $\forall X \in \mathbb{R}^n, \forall O \in \text{On}(\mathbb{R})$
 $\|OX\|_2 = \|X\|_2$ donc $\|O\|_2 = 1$ donc $\text{On}(\mathbb{R})$ est borné. Et

$\varphi: M \mapsto M^t M$ est continue car $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$ avec

$\varphi_2: (A, B) \mapsto AB$ et $\varphi_1: A \mapsto (A, {}^t A)$ sont continues (car lin et bilin) (+)
et $\text{On}(\mathbb{R}) = \overline{\varphi_1^{-1}(\{Id\})}$ et $\{Id\}$ est fermé.

donc $\text{On}(\mathbb{R})$ est fermé. Donc $\text{On}(\mathbb{R})$ est fermé-borné dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$, $\mathbb{R}$ eu de dim finie, il est compact. $\square$

2.2. Lemme 1: soit $A \subset M_n(\mathbb{R})$ est compact alors

$\text{Conv}(A)$ est compact. $\leftarrow$ [Tauvel p78] [Tauvel p77] $\rightarrow$

Ce lemme est une corollaire du thm suivant

Théorème 1: [Carathéodory - Tauvel p77] Soit A une partie de E (espace affine de dimension finie). Tout élément de $\text{Conv}(A)$ s'écrit comme une combinaison convexe de k points de A avec $k \leq 1 + \dim(E)$.

Conclusion: avec Étape 1 + Lemme 1, on a $\text{Conv}(\text{On}(\mathbb{R}))$ est compact dans $(M_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$.

Étape 3: le thm de sép. des convexes dit:

$\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \{M\}$ est convexe fermé, E est convexe

compact, alors si $M \notin \mathcal{C}$, $\{M\} \cap \mathcal{C} = \emptyset$ et donc par le thm de séparation des convexes on a il existe $\varphi \in (M_n(\mathbb{R}))^*$ telle que $\varphi(M) > \sup_{N \in \mathcal{C}} (\varphi(N))$.

Contraposée: Soit $M \in B_1$, si $\forall \varphi \in (M_n(\mathbb{R}))^*$, $\varphi(M) \leq \sup_{N \in \mathcal{C}} (\varphi(N))$ alors $\{M\} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$ donc $M \in \mathcal{C}$.

3.1 Par "thm de représentation de Riesz" version

Euclidienne, $\forall \varphi \in (M_n(\mathbb{R}))^*$, $\exists B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \varphi(A) = \langle B, A \rangle = \text{Tr}({}^t B A) = \text{Tr}(A {}^t B).$$

Donc pour mq $M \in \mathcal{C}$ il faut mq $\forall B \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\langle B, M \rangle \leq \sup_{N \in \mathcal{C}} (\langle B, N \rangle) \text{ i.e. } \text{Tr}({}^t B M) \leq \sup_{N \in \mathcal{C}} (\text{Tr}({}^t B N)).$$

3.2 Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$, par le théorème de décomposition

polaire il existe $(O, S) \in O_n(\mathbb{R}) \times S_n^+(\mathbb{R})$ telles que

$${}^t B = OS.$$

Comme S est symétrique, par le théorème spectral il existe une b.o.n $B = (E_1, \dots, E_m)$ de $\mathbb{R}^m$ de diagonalisation

$$\text{Et } \text{Tr}(S) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \text{ où } \lambda_i \in \text{Sp}(S).$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \text{Tr}({}^t B M) &= \text{Tr}(M {}^t B) = \text{Tr}(M O S) = \sum_{i=1}^m \langle M O E_i, E_i \rangle_2 \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i \langle M O E_i, E_i \rangle_2 \end{aligned}$$

et par le théorème de Cauchy-Schwarz on a alors

$$\begin{aligned} |\operatorname{Tr}({}^tBM)| &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \|MOE_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \|MO\|_2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \underbrace{\|M\|_2}_{\leq 1} \underbrace{\|O\|_2}_{=1} \leq \operatorname{Tr}(S). \end{aligned}$$

3.3. Si on prend $N = {}^tO$, $\operatorname{Tr}({}^tBN) = \operatorname{Tr}(OS{}^tO)$

$= \operatorname{Tr}(S{}^tOO) = \operatorname{Tr}(S)$ donc $\operatorname{Tr}({}^tBM) \leq \operatorname{Tr}({}^tBN)$

et $N \in \mathcal{E}$ donc $\operatorname{Tr}({}^tBM) \leq \sup_{N \in \mathcal{E}} (\operatorname{Tr}({}^tBN))$

Donc par contraposée du théorème de séparation des convexes, $M \in \mathcal{E}$ donc $B_1 \subset \mathcal{E}$

Conclusion : $\operatorname{Conv}(\operatorname{On}(\mathbb{R})) = B_1$ □

Démonstration des théorèmes utilisés

Théorème de séparation des convexes en dim. finie

Soient A et B deux convexes de $\mathcal{E}$, espace affine de dimension finie, si $A \cap B = \emptyset$, alors il existe f une forme affine telle que $f(A) \subset]-\infty, 0[$ et $f(B) \subset]0, +\infty[$

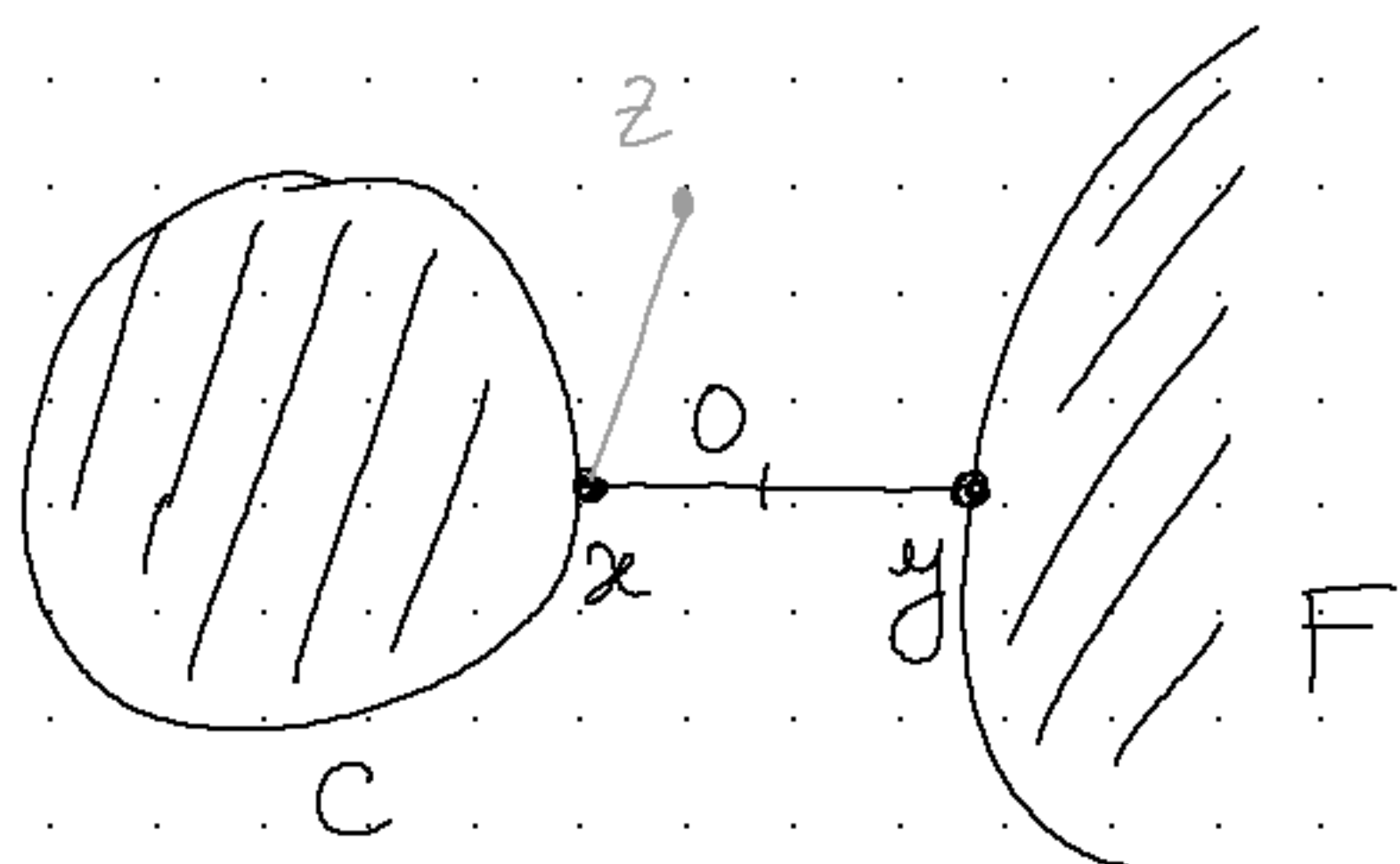
Démonstration : Soit $\mathcal{E}$ un espace affine.

Comme $\mathcal{E}$ est de dimension finie et F et C sont fermés, $\exists (x, y) \in C \times F$ tels que $d(C, F) = d(x, y)$.

($\varphi: z \in C \mapsto d(z, F)$ est continue sur un compact donc min atteint).

Comme $C \cap F = \emptyset$, $d(x, y) > 0$ et $\overrightarrow{xy} \neq \vec{0}$.

On pose $O \in E$ tel que $x = O - \frac{1}{2}\overrightarrow{xy}$ (O milieu de $[xy]$)
 $y = O + \frac{1}{2}\overrightarrow{xy}$



on pose

$$f: z \in E \mapsto -\langle \overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{xy} \rangle$$

f est une forme affine,

on pose $a = f(x) = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{xy}\|^2 > 0$

$$\text{Mq } C \subset f^{-1}([a; +\infty[).$$

Supposons que il existe $z \in C$ tel que $f(z) < a$.

Soit $\varepsilon > 0$, on pose $z_\varepsilon = x + \varepsilon \overrightarrow{xz}$ pour $\varepsilon \in]0; 1]$, $z_\varepsilon \in C$ par convexité de C .

$$\|\overrightarrow{yz_\varepsilon}\|^2 = \|\overrightarrow{yx}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{yx}, \overrightarrow{xz_\varepsilon} \rangle + \|\overrightarrow{xz_\varepsilon}\|^2$$

$$= \|\overrightarrow{xy}\|^2 - 2\varepsilon \langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xz} \rangle + o(\varepsilon)$$

$$= \|\overrightarrow{xy}\|^2 - 2\varepsilon \langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{xO} \rangle - \underbrace{2\varepsilon \langle \overrightarrow{xy}, \overrightarrow{Oz} \rangle}_{< 2\varepsilon a} + o(\varepsilon)$$

$$< \|\overrightarrow{xy}\|^2 - 2\varepsilon \alpha + o(\varepsilon) \quad \alpha > 0$$

Donc pour $\varepsilon > 0$ assez petit $-2\varepsilon \alpha + o(\varepsilon) < 0$

et donc $\|\overrightarrow{yz_\varepsilon}\| < \|\overrightarrow{xy}\|$. Absurd.

Donc $\forall z \in C, f(z) \geq a$.

De même on montre que $f(w) \leq -a \quad \forall w \in F$

Théorème de décomposition polaire

Théorème de Carathéodory + lemme $\text{Conv}(C)$ où C est compact

Soit A une partie de E (espace affine de dim. finie)

Tout élément de $\text{Conv}(A)$ s'écrit comme combinaison convexe de k points de A , avec $k \leq 1 + \dim(E)$

Corollaire: Si A est non-vide et compact, $\text{Conv}(A)$ aussi.

Démonstration [Touvet 77]:

Corollaire: Soit A une partie non-vide compacte de E . Mg $\text{Conv}(A)$ est compact.

On note $n = \dim(E)$,

• $\underbrace{\{(t_1, \dots, t_{n+1}) \in [0, 1]^{n+1} \mid t_1 + \dots + t_{n+1} = 1\}}_{\text{borné de } \mathbb{R}^{n+1}} = \mathcal{C}$ est un fermé-

borné: $f: (\mathbb{R}_+)^{n+1} \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction
 $(t_1, \dots, t_{n+1}) \mapsto t_1 + \dots + t_{n+1}$

continue (forme linéaire en dim. finie) et

$$\mathcal{C} = f^{-1}(\{1\})$$

borné: $\mathcal{C} \subset [0, 1]^{n+1}$

• Si on pose $\varphi: \mathcal{C} \times E^{n+1} \rightarrow E$

$$(t_1, \dots, t_{n+1}, a_1, \dots, a_{n+1}) \mapsto \text{Bar}((a_i; t_i)) \\ = 0 + \sum_{i=1}^{n+1} t_i \overrightarrow{0a_i}$$

$0 \in E$

φ est continue car

$$\vec{\varphi} : (t_1, \dots, t_{mn}, \vec{oa_1}, \dots, \vec{oa_{mn}}) \mapsto \sum_{i=1}^m t_i \vec{oa_i}$$

est continue car Lipschitzienne.

Bonc $\varphi(A) = \text{Conv}(A)$ est compact car image d'un compact par une application continue. $\square$

Thm de Carathéodory:

Soit A une partie de E . Tout élément de $\text{Co}(A)$ s'écrit comme combinaison convexe de k points de A avec $k \leq 1 + \dim(E)$.

Proposition: Si A est une partie de E , $\text{co}(A)$ est l'ensemble des combinaisons convexes d'éléments de A .

Définitions: • $\text{Co}(A)$ est l'intersection de tous les convexes contenant A . C'est le plus petit convexe contenant A .

• Si $a = (A_i)_{i \in I}$ est une famille de points de E , $B \in E$. On dit que B est une combinaison convexe de a si il existe une famille presque nulle $(t_i)_{i \in I}$ de réels positifs ou nuls vérifiant

$$\sum_{i \in I} t_i = 1 \text{ et } B = \sum_{i \in I} t_i A_i$$

Démo de la proposition:

Mq $\text{Co}(A) \subset S$

Si S est l'ensemble des combinaisons convexes de A alors S est convexe et par définition $\text{Co}(A) \subset S$.

Mq $S \subset \text{Co}(A)$

Si $P \in S$ alors $P = \sum_{i \in I} t_i a_i$ donc $\forall i \in I$ convexe

tel que $A \subset E$, $P \in E$ donc $P \in \text{Co}(A)$ donc

$\text{Co}(A) \subset S$

Donc $\text{Co}(A) = S$ □

Démo du théorème de Carathéodory:

Soit $P \in \text{Co}(A)$, mq P s'écrit comme une C.L. de k points de A où $k \leq \dim(E) + 1$.

Comme $P \in \text{Co}(A)$, d'après la proposition $\exists (t_i)_{i \in I}$

presque nulle telle que $P = \sum_{i \in I} t_i a_i$

si $\{i \in I \mid t_i \neq 0\}$ est de cardinal $\leq \dim(E) + 1$ ok.

sinon, $k > \dim(E) + 1$ on note $P = t_1 a_1 + \dots + t_k a_k$

$0 = t_1 \overrightarrow{Pa_1} + \dots + t_k \overrightarrow{Pa_k}$ donc $0 = t_1 \overrightarrow{Pa_1} + t_2 \overrightarrow{Pa_1} + t_2 \overrightarrow{a_1 a_2}$

$+ \dots + t_k \overrightarrow{Pa_1} + t_k \overrightarrow{a_1 a_k} = \overrightarrow{Pa_1} + t_2 \overrightarrow{a_1 a_2} + \dots + t_k \overrightarrow{a_1 a_k} = 0$

Comme $k-1 > \dim(E)$, $(\overrightarrow{a_1 a_2}, \dots, \overrightarrow{a_1 a_k})$ est une

famille de $k-1$ vecteurs dans un espace de

$\dim(E)$ donc elle est l'ée

non tous nuls

$$\exists \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ tq } \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{a_k} = \overrightarrow{0}$$

$$\text{donc } \forall O \in E, (\lambda_2 + \dots + \lambda_k) \overrightarrow{Oa_1} + \lambda_2 \overrightarrow{Oa_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{Oa_k} = \overrightarrow{0}$$

$$\text{donc } -(\lambda_2 + \dots + \lambda_k) \overrightarrow{Oa_1} + \lambda_2 \overrightarrow{Oa_2} + \dots + \lambda_k \overrightarrow{Oa_k} = \overrightarrow{0}$$

$$\text{On pose } \mu_1 = \lambda_2 + \dots + \lambda_k \text{ et } \forall i \in [2; k] \mu_i = -\lambda_i.$$

$\mu_1 + \dots + \mu_k = 0$ et les μ_i sont non tous nuls donc

$$\exists \mu_i > 0 \text{ avec } i \in [1; k].$$

$$\text{On prend alors } \delta = \min \left\{ \frac{t_i}{\mu_i} \mid \mu_i > 0 \right\} = \frac{t_{i_0}}{\mu_{i_0}} \text{ et on pose}$$

$$v_i = t_i - \delta \mu_i \quad \forall i \neq i_0, \quad \delta \mu_i \leq \frac{t_i}{\mu_i} \leq t_i \text{ donc } t_i - \delta \mu_i \geq 0$$

$$\text{et } v_{i_0} = 0. \text{ On a de plus: } \sum_{i=1}^k v_i = \underbrace{\sum_{i=1}^k t_i}_{=1} - \delta \underbrace{\sum_{i=1}^k \mu_i}_{=0} = 1.$$

$$\text{et } M = \overrightarrow{0} + t_1 \overrightarrow{Oa_1} + \dots + t_k \overrightarrow{Oa_k}$$

$$= \overrightarrow{0} + (t_1 - \delta \mu_1) \overrightarrow{Oa_1} + \dots + (t_k - \delta \mu_k) \overrightarrow{Oa_k} = \sum_{i=1}^k v_i \overrightarrow{a_i} \quad \begin{array}{l} \leftarrow k-1 \text{ termes} \\ \text{car } v_{i_0} = 0. \end{array}$$

Attention à ne pas faire l'erreur suivante:

donc $\exists r \leq \dim(E)$ tel que, quitte à renuméro

$(\overrightarrow{a_2}; \dots; \overrightarrow{a_r})$ est une base de $\text{Vect}(\overrightarrow{a_2}, \dots, \overrightarrow{a_k})$

Dans ce cas $\exists \lambda_1, \dots, \lambda_r$ tq $\overrightarrow{a_1} = \lambda_2 \overrightarrow{a_2} + \dots + \lambda_r \overrightarrow{a_r}$

donc par unicité de l'écriture dans une base

$$\sum_{i=2}^r \lambda_i = \sum_{i=2}^k t_i = 1 - t_1 \rightarrow \underline{\text{NON}} \text{ car les } \lambda_i \text{ ne}$$

sont pas forcément ≥ 0

Compléments :

(+) en dim. finie linéaire $\Rightarrow$ continue

multi-linéaire $\Rightarrow$ continue

$$(+) \quad \langle A; B \rangle = \frac{1}{n} \text{Tr}(tAB)$$

