

Différentielle et isométrie [Gaudon 349 Ex4]

Énoncé: Soit E un espace euclidien de dim. finie.

On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$ le p.s et la norme associée.

sur E . Soit $f: E \rightarrow E$ une application $\mathcal{C}^1$ tq $\forall x \in E$.

df_x est une isométrie, alors f est une isométrie affine de E sur E .

DÉMONSTRATION

Étape 1: Mg $\forall a \in E$ $\exists U_a \subset E$ un ouvert tq $a \in U_a$ et

$$\forall (x, y) \in U_a^2, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

• $\forall a \in E, \|df_a\| = 1$ donc comme E est convexe par l'IAF, $\forall (x, y) \in E^2, \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$. (*)

• on veut montrer l'inégalité inverse:

Soit $a \in E$, comme df_a est une isométrie, Jf_a est inversible ($\det(Jf_a) = 1$). de plus f est $\mathcal{C}^1$ donc par le thm d'inversion locale il existe V un voisinage de a

dans E et $W = f(V)$ tels que $f|_V$ est un $\mathcal{C}^1$ -difféo.

de plus, sur V , $f|_V \circ f^{-1} = \text{id}$ donc $\forall x \in V$,

$$\underbrace{Jf(f^{-1}(x))}_{\in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})} Jf^{-1}(x) = 2n \text{ donc } Jf^{-1}(x) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$$

on prend alors $V_a \subset V$ une boule contenant a . Comme

V_a est convexe et $\forall x \in V_a, \|df_x^{-1}\| = 1$, on a par l'IAF:

$$\forall (x, y) \in V_a \quad \|f^{-1}(x) - f^{-1}(y)\| \leq \|x - y\|.$$

On pose alors $U_a = f^{-1}(V_a)$.

Ainsi, $\forall (x, y) \in U_a, (f(x), f(y)) \in V_a$ et

$$\|f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(y))\| \leq \|f(x) - f(y)\|$$

$$\text{donc } \forall (x, y) \in U_a, \|x - y\| \leq \|f(x) - f(y)\|.$$

Ainsi avec (*), $\forall (x, y) \in U_a, \|x - y\| = \|f(x) - f(y)\|$. $\square$

Étape 2: Mg $\forall (x, y) \in U_a^2, \forall (h, l) \in E^2, \langle df_x(h), df_y(l) \rangle = \langle h, l \rangle$.

On fixe $y \in U_a$, on s'intéresse à

$$\Phi: x \in U_a \mapsto \|f(x) - f(y)\|^2$$

$$\Phi = \alpha \circ \beta \quad \text{où } \alpha: x \in E \mapsto \|x\|^2$$

$$\beta: x \in U_a \mapsto f(x) - f(y)$$

α et β sont diff sur leurs espaces de définition et

$$\forall x \in E \quad d\alpha_x: h \mapsto 2\langle x, h \rangle, \quad \forall x \in U_a \quad d\beta_x: h \mapsto df_x(h).$$

donc Φ l'est aussi et $\forall x \in U_a, d\Phi_x = d\alpha_{\beta(x)} \circ d\beta_x$

$$\text{donc } \forall x \in U_a \quad d\Phi_x: h \mapsto 2\langle f(x) - f(y), df_x(h) \rangle$$

Et on sait que $\forall x \in U_a, \Phi(x) = \|x - y\|^2$

$$\text{donc } \forall x \in U_a \quad d\Phi_x: h \mapsto 2\langle x - y, h \rangle$$

$$\forall (x, y) \in U_a^2, \forall h \in E, \langle f(x) - f(y), df_x(h) \rangle = \langle x - y, h \rangle.$$

On fixe $x \in U_a$ et $h \in E$ et on s'intéresse à

$$\psi: y \in U_a \mapsto \langle f(x) - f(y); df_x(h) \rangle$$

ψ est différentiable sur U_a comme composée de f^0 diff

$$\text{et } \forall y \in U_a, \forall l \in E, d\psi_y(l) = -\langle df_y(l); df_x(h) \rangle$$

De plus on sait que $\forall y \in U_a, \psi(y) = \langle x - y; h \rangle$ donc

$$\forall y \in U_a, \forall l \in E, d\psi_y(l) = -\langle l; h \rangle$$

D'où finalement, $\forall (x; y) \in U_a^2, \forall (h; l) \in E^2,$

$$\langle df_x(h); df_y(l) \rangle = \langle h; l \rangle.$$

Étape 3: Mg. $df_x = df_y$ pour tout $(x; y) \in U_a^2$.

Soient $(x; y) \in U_a^2, \forall h \in E,$

$$\begin{aligned} \|df_x(h) - df_y(h)\|^2 &= \|df_x(h)\|^2 - 2\langle df_x(h); df_y(h) \rangle \\ &\quad + \|df_y(h)\|^2 \\ &= \|h\|^2 - 2\|h\|^2 + \|h\|^2 = 0 \end{aligned}$$

Donc $df_x = df_y$.

Étape 4: Mg. f est constante sur E tout entier.

On pose $A = \{x \in U_a; df_x = df_a\} \subset E$ et $a \in A$ donc $A \neq \emptyset$.

• $\forall b \in A, \exists U_b$ un ouvert tel que $\forall x \in U_b, df_x = df_b = df_a$

Donc $U_b \subset A$. Donc A est ouvert. (étape 3) dans E .

• Comme f est $\mathcal{C}^1$, $df: x \in E \mapsto df_x$ est continue et

$A = df^{-1}(\{df_a\})$ donc A est fermé dans E .

comme E est un ev, E est convexe donc connexe
et A est un ouvert-fermé de E donc $A = E$.

Donc df est constante sur E .

$$\forall x \in E, df_x = df_a$$

Étape 5: Mg f est une isométrie affine de E dans E :

on pose $g: x \in E \mapsto f(x) - df_a(x)$

g est différentiable sur E et $\forall x \in E, \forall h \in E,$

$$dg_x(h) = df_x(h) - df_a(h) = 0$$

donc $dg_x = 0 \quad \forall x \in E$.

Comme E est convexe on en déduit par l'IAF

que $\forall x \in E, \exists u \in E$ tq $f(x) - df_a(x) = u$

donc $\forall x \in E, f(x) = u + df_a(x)$.

et df_a est une isométrie donc f est une isométrie
affine de $E \rightarrow E$.