

Décomposition polaire :

Référence : [Rombaldi]

Énoncé : Thm 1 : $\forall A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists ! B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tq $A = B^2$.

(même chose si on a des matrices dans $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$)

Thm 2 : $\forall A \in GL_n(\mathbb{R}), \exists ! (\Omega; S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tq

$$A = \Omega S$$

si $A \in M_n(\mathbb{R}), \exists (\Omega; S) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ tq $A = \Omega S$.

Thm 3 : $\varphi : \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$ est un homéo-
 $(\Omega, S) \mapsto \Omega S$

morphisme

Étapes : Démonstration complète

(E1) Si $A = \Omega S$ alors ${}^t A = S {}^t \Omega$ donc $A {}^t A = S^2$

et $A {}^t A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ($\langle A {}^t A X, X \rangle = \langle {}^t A X, {}^t A X \rangle \geq 0$). Mg si $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ alors $\exists ! B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) / A = B^2$.

(E2) $\forall A \in GL_n(\mathbb{R})$, existence et unicité de $(\Omega; S)$ tq $A = \Omega S$.

(E3) $\varphi : (\Omega; S) \mapsto \Omega S$ bihoméomorphisme de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ dans $GL_n(\mathbb{R})$.

(E4) Extension à $M_n(\mathbb{R})$ pour $A = \Omega S$ mais plus d'unicité.

$$S_k \rightarrow S \quad {}^t S_k \rightarrow {}^t S$$

Si $A = \Omega S$, ${}^t A = S^t \Omega$ donc ${}^t A A = S^2$ et ${}^t A A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Étape 1: Mq $\forall A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \exists ! B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), A = B^2$.

Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, alors par le théorème spectral A se diagonalise dans une b.o.n. et toutes ses vp sont réelles positives. Donc en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses vp et $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tq $A = P D P^t$.

On pose alors $\Delta = \begin{pmatrix} \mu_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mu_n \end{pmatrix}$ où $\mu_i = \sqrt{\lambda_i} \quad \forall i \in [1; n]$.

Ainsi, $A = \underbrace{P \Delta^t P}_{=B} \underbrace{P \Delta^t P}_{=B} = B^2$ comme $B = P \Delta^t P \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

car ses valeurs propres sont toutes positives.

unicité: mq B est polynomiale en A .

Pour relier A et B on veut lier D et Δ . On considère alors les $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ valeurs propres distinctes de A et on prend φ le polynôme interpolateur de Lagrange tq $\varphi(\lambda_i) = \sqrt{\lambda_i}$ (φ est alors de degré $p-1$) et on a

$\varphi(A) = \varphi(P D P^t) = P \varphi(D) P^t = P \Delta^t P = B$. Donc $B \in \mathbb{R}[A]$.

Si $C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est tq $C^2 = A$, alors C commute avec A donc avec B . Comme elles sont symétriques elles sont alors diagonalisables simultanément dans une b.o.n.

$\exists Q \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ tq tQBQ et tQCQ sont diagonales.

On pose ${}^tQBQ = \begin{pmatrix} l_1 & & \\ & \ddots & \\ & & l_n \end{pmatrix}$ et ${}^tQCQ = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{pmatrix}$

$$\text{or } ({}^tQBQ)^2 = {}^tQ A Q = ({}^tQCQ)^2$$

donc $\forall i \in [1; n] \quad l_i = \pm m_i$ or $l_i \geq 0$ et $m_i \geq 0$

car $B, C \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ donc $l_i = m_i$

donc ${}^tQBQ = {}^tQCQ$ donc $B = C$ □

(E2) Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$, ${}^tAA \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc par la prop. précédente $\exists ! B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tq ${}^tAA = B^2$

Analyse: si $A = \Omega S$, alors $S^t \Omega \Omega S = B^2$ donc $S^2 = B^2$

donc $S = B$. Donc on a directement unicité de S . Et

comme $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ $\Omega = AS^{-1}$ donc en cas d'existence on a unicité.

Synthèse: on pose $S = B$, $\Omega = AS^{-1}$

on vérifie alors que $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$.

$${}^t\Omega = {}^t(S^{-1}){}^tA \text{ or } S^{-1}S = \mathbb{I}_n \text{ donc } {}^t(S^{-1})S = \mathbb{I}_n$$

$$\text{donc } {}^t(S^{-1}) = S^{-1} \text{ donc } {}^t\Omega = S^{-1}{}^tA$$

$$\text{donc } {}^t\Omega \Omega = S^{-1} \underbrace{{}^tA A}_{S^2} S^{-1} = \mathbb{I}_n \text{ donc } \Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}).$$

(E3) $\varphi: (\Omega, S) \mapsto \Omega S$ réalise un homéomorphisme de

$\mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ sur $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

On sait donc que toute matrice $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique $A = \Omega S$ avec $\Omega \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ donc φ est bijective.

φ est une fonction polynomiale en les coefs de Ω et S donc continue.

Mq φ^{-1} est continue.

Soit $(A_k)_{k \geq 0}$ une suite de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ tq $A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Mq $\varphi^{-1}(A_k)$ converge vers $\varphi^{-1}(A) = (\Omega; S)$.

$\forall k \in \mathbb{N} \exists (\Omega_k, S_k) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $A_k = \Omega_k S_k$.

$\varphi^{-1}(A_k) = (\Omega_k; S_k)$.

Comme $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact, il existe $(\Omega_{\varphi(k)})_k$ une sous-suite convergent vers $\Omega' \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ de $(\Omega_k)_{k \geq 0}$.

Donc de même $(S_{\varphi(k)})_{k \geq 0}$ converge vers $S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

et $S' = {}^t \Omega' A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ donc $S' \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

On a alors $A = \Omega' S'$ or la décomposition étant unique $\Omega' = \Omega, S' = S$.

Donc $(\Omega_k)_{k \geq 0}$ a une unique vda dans $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ compact, donc elle converge vers Ω .

Et $(S_k)_{k \geq 0} = ({}^t \Omega_k A_k)_{k \geq 0}$ converge vers ${}^t \Omega A = S$.

Autrement dit $\varphi^{-1}(A_k) = (\Omega_k; S_k) \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} (\Omega; S) = \varphi^{-1}(A)$

Donc par caractérisation seq. de la continuité φ^{-1} est $\mathcal{C}^0$.

(E4) Mg on peut généraliser à $M_n(\mathbb{R})$

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ dans

$M_n(\mathbb{R})$, $\exists (A_k)_{k \geq 0} \in GL_n(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $A_k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} A$

$\forall k \in \mathbb{N} \exists (\Omega_k, S_k) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $A_k = \Omega_k S_k$

Ainsi $(\Omega_k)_{k \geq 0}$ est une suite de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

$$(S_k)_{k \geq 0} \xrightarrow{\hspace{2cm}} \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$$

Or $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ est compact dans $M_n(\mathbb{R})$ donc on peut

extraire une sous-suite $(\Omega_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente vers Ω

Or $(A_{\varphi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ converge également

Donc $S_{\varphi(k)} = {}^t \Omega_{\varphi(k)} A_{\varphi(k)}$ converge également par

continuité de $\varphi(A; B) \mapsto AB$ (bilineaire en $\dim < +\infty$)

Donc $S_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} S$ et $A_{\varphi(k)} = \Omega_{\varphi(k)} S_{\varphi(k)}$ donc $A = \Omega S$.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists P_{\varphi(k)} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D_{\varphi(k)}$ diagonale définie positive

telle que $P_{\varphi(k)} D_{\varphi(k)} {}^t P_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} S$

Il existe alors une sous-suite $(P_{\varphi(k)})_{k \geq 0}$ tq $P_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} P$

et $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ donc $(D_{\varphi(k)})_{k \geq 0}$ converge aussi et on a

alors $D_{\varphi(k)} \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} D \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et donc $S = P D {}^t P \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

D'où $A = \Omega S$

Compléments:

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'endomorphismes sym. de E ,
(I ayant au moins deux éléments). Il existe une
base orthonormée commune de diagonalisation dans
 E pour $(u_i)_{i \in I}$ ssi les $(u_i)_{i \in I}$ commutent entre eux.