

Convergence d'une suite de variables aléatoires:

Référence: GK P 313

Énoncé: Soit $(U_n)_{n \geq 1}$, une suite de v.a.i. de même loi $\mathcal{N}(0;1)$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on définit la suite $(X_n)_n$ par la relation de récurrence $X_n = \theta X_{n-1} + U_n$ pour tout $n \geq 1$ et $X_0 = 0$ presque sûrement.

Alors si $|\theta| < 1$, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \in \mathcal{N}(0; \frac{1}{1-\theta^2})$

si $|\theta| \geq 1$, $(X_n)_{n \geq 0}$ ne converge pas.

Étapes

(E1) Trouver la loi de X_n .

(E2) Trouver, si elle existe, la limite de $(X_n)_{n \geq 0}$.

⑦ déterminer la loi des X_m :

$$X_0 = 0$$

$$X_1 = U_1$$

$$X_2 = \Theta U_1 + U_2$$

$$X_3 = \Theta^2 U_1 + \Theta U_2 + U_3$$

$\vdots$

$$X_m = \Theta^{m-1} U_1 + \Theta^{m-2} U_2 + \dots + U_m = \sum_{k=1}^m \Theta^{m-k} U_k$$

Donc si $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_{X_m}(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \mathbb{E}\left[e^{it \sum_{k=1}^m \Theta^{m-k} U_k}\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^m e^{it \Theta^{m-k} U_k}\right]$$

$$\stackrel{\text{indép}}{\nearrow} = \prod_{k=1}^m \left(\mathbb{E}[e^{it \Theta^{m-k} U_k}] \right)$$

$$= \prod_{k=1}^m \phi_{U_k}(t \Theta^{m-k})$$

or $U_k \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ donc

$$\phi_{U_k}: t \mapsto \mathbb{E}[e^{itU_k}] = \int_{\mathbb{R}} e^{itU_k(\omega)} d(P_{U_k}(\omega))$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{itx} f_{U_k}(x) dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \times e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

donc

$$\begin{aligned}\phi_{X_m}(t) &= \prod_{k=1}^m e^{-\frac{(t\theta^{m-k})^2}{2}} \\ &= e^{-\frac{t^2}{2} \left(\sum_{k=1}^m \theta^{2m-2k} \right)} \\ &= e^{-\frac{t^2}{2} (\theta^{2m-2} + \theta^{2m-4} + \dots + \theta^2 + 1)} \\ &= e^{-\frac{t^2}{2} (1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2m-2})}\end{aligned}$$

Donc X_m a la même fonction caractéristique que

$$Y \subset \mathcal{N}(0, (1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2m-2}))$$

Donc X_m est une variable gaussienne centrée de variance $1 + \theta^2 + \theta^4 + \dots + \theta^{2m-2} = \sum_{k=0}^{m-1} \theta^{2k}$

$$= \frac{1 - \theta^{2m}}{1 - \theta^2}$$

(E2) Étudier la convergence en loi de la suite $(X_m)_{m \geq 0}$

Si $|\theta| < 1$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\phi_{X_m}(t) = e^{-\frac{t^2}{2} \left(\frac{1 - \theta^{2m}}{1 - \theta^2} \right)} \longrightarrow e^{-\frac{t^2}{2} \frac{1}{1 - \theta^2}}$$

Donc par le premier thm de Lévy, dont l'énoncé est

Soit $(\mu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesure de probabilité,

(μ_n) converge faiblement vers μ ssi

$$\forall t \in \mathbb{R}^d \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi_{\mu_n}(t) = \phi_{\mu}(t)$$

(C'est aussi un thm/définition dans Boole-Ledoux)

Ainsi si $X \subset \mathcal{N}(0, \frac{1}{1 - \theta^2})$, $\phi_{X_m}(t) \longrightarrow \phi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

donc $X_m \xrightarrow{\mathcal{L}} X \subset \mathcal{N}(0; \frac{1}{1-\theta^2})$

Si $|\theta| \geq 1$ alors la quantité $\frac{1-\theta^{2n}}{1-\theta^2}$ diverge

en $+\infty$.

Donc $\phi_{X_m} : t \mapsto e^{-\frac{t^2}{2} \left(\frac{1-\theta^{2n}}{1-\theta^2} \right)}$

Compléments :

(*) $\Phi_X : t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{E}[e^{i\langle t, X \rangle}] = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} dP_X(x)$

(+) théorème : si $\Phi_X = \Phi_Y$ alors $P_X = P_Y$

(+) théorème : $(X_1, \dots, X_n)$ sont indépendantes ssi $\forall f$ fonction mesurable, $\mathbb{E}[\prod_i f(X_i)] = \prod_i \mathbb{E}[f(X_i)]$

(+) Corollaire : $(X_1, \dots, X_n)$ est une famille indép.

ssi $\forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\Phi_{(X_1, \dots, X_n)} = \Phi_{X_1}(t_1) \dots \Phi_{X_n}(t_n)$

(+) Si X et Y sont indép.

$$P_{X+Y} = P_X * P_Y$$

et $\forall f$ mesurable $\int f d(P_X * P_Y) = \int_{\mathbb{R}^2} f dP_X(x) dP_Y(y)$

(+) thm : X et Y indép $\Rightarrow \Phi_{X+Y} = \Phi_X \Phi_Y$

(+) Définition / thm : $(X_n)_n$, X var

$(X_n)_n$ converge en loi vers X si (P_{X_n}) converge faiblement vers P_X (i.e. $\forall f$ continue bornée

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dP_{X_n}(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} f(x) dP_X(x) \quad 2.)$$

Ceci est équivalent à

i) $F_{X_n}(t) \longrightarrow F_X(t)$ en tout point de continuité de F_X

ii) $\Phi_{X_n}(t) \longrightarrow \Phi_X(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Dém : i) $\Rightarrow$ ii) avec $f = \cos(tx)$ et $f = \sin(tx)$