

Convergence loi binomiale vers loi de Poisson:

Référence: [GK]

Lemme 1: [Scheffé] Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f, (f_n)_{n \geq 1} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ des fonctions positives intégrables par rapport à μ telles que: a) $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f$ μ -p.p.
b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} f_n d\mu \right) = \int_{\Omega} f d\mu$

Alors $f_n \xrightarrow{L^1} f$

Corollaire 1: Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soient ν et $(\nu_n)_{n \geq 1}$ des mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ admettent les densités f et $(f_n)_{n \geq 1}$ par rapport à μ . On suppose que $f_n \rightarrow f$ μ -p.p. Alors (ν_n) converge faiblement vers ν .

Corollaire 2: Soient X et $(X_n)_{n \geq 1}$ des v.a. discrètes à valeurs dans un ensemble dénombrable $\mathcal{D}$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (P(X_n = k)) = P(X = k)$

Alors $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers X .

Théorème: Soit, pour $n \geq 1$, une suite de v.a. $X_n \hookrightarrow B(n, p_n)$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (np_n) = \lambda > 0$.

Alors X_n converge en loi.

Étapes: (E1) lemme 1 avec $|f - f_n| = f_n - f + 2(f - \min(f, f_n))$ + TCD

(E2) Corollaire 1 avec lemme 1, $\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f_n = 1$ car proba.

(E3) Corollaire 2: P_{X_n} a densité $P_{X_n}(A) = \sum_{k \in A} P(X_n = k) (= f_n(k))$

puis corollaire 1

(E4) Mg. $P(X_n = k) \rightarrow \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ avec $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$, $(1-p_n)^n \sim e^{-\lambda}$...

① lemme de Scheffé:

Comme f et f_n sont positives, $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f - f_n| \leq f + f_n$

donc $|f - f_n|$ est intégrable sur Ω .

$$\forall x \in \Omega, \quad |f_n(x) - f(x)| = \max(f_n(x); f(x)) - \min(f_n(x); f(x))$$

$$\text{et} \quad \max(f_n(x); f(x)) = f(x) + f_n(x) - \min(f(x); f_n(x))$$

$$\text{donc} \quad |f_n - f| = f + f_n - 2\min(f; f_n)$$

$$|f_n - f| = f + f_n - 2f + 2f - 2\min(f; f_n)$$

$$|f_n - f| = f_n - f + 2(f - \min(f; f_n))$$

Tout est bien intégrable et

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu &= \int_{\Omega} f_n d\mu - \int_{\Omega} f d\mu + 2 \int_{\Omega} (f - \min(f; f_n)) d\mu \\ &= \|f_n - f\|_{L^1(\mu)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

$$\text{Mq} \quad \int_{\Omega} (f - \min(f; f_n)) d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On va chercher à appliquer le thm de convergence dominée

$$1) \quad f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f \quad \mu\text{-p.p.} \quad \text{donc} \quad \min(f; f_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f \quad \mu\text{-p.p.}$$

$$f - \min(f_n; f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \mu\text{-p.p.}$$

$$2) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |f - \min(f; f_n)| \leq f \text{ intégrable sur } \Omega.$$

Donc par le thm de convergence dominée, on a :

$$\int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} (f - \min(f, f_n)) d\mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (f - \min(f, f_n)) d\mu$$

donc $\int_{\Omega} (f - \min(f, f_n)) d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

d'où $\|f - f_n\|_{L^1(\mu)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ □

(E2) Corollaire 1

Soit g une fonction continue et bornée,

$$|\int_{\Omega} g d\nu - \int_{\Omega} g d\nu_n| = |\int_{\Omega} g(f - f_n) d\mu|$$

$$\leq \|g\|_{\infty} \int_{\Omega} |f - f_n| d\mu$$

et $f_n \rightarrow f$ μ p.p. et comme f et f_n sont des densités de mesure de proba. donc $\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} f_n d\mu = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

donc $\int_{\Omega} |f - f_n| d\mu \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\int_{\Omega} g d\nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} g d\nu$

donc $(\nu_n)_{n \geq 1}$ converge faiblement vers ν

(E3) Corollaire 2 $\mathbb{P}_{X_m}$ et $\mathbb{P}_X$ admettent des densités par rapport à la mesure de comptage.

$$\mathbb{P}_{X_m}(A) = \sum_{k \in A} \mathbb{P}(X_m = k) = \sum_{k \in A} f_n(k)$$

où $f_n: k \in \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{P}(X_m = k)$

De même $\mathbb{P}_X$ a pour densité $f: k \in \mathbb{N}^* \mapsto \mathbb{P}(X = k)$

$f_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ parce que par hypothèse $\forall k \in \mathbb{D} \quad \mathbb{P}(X_m = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(X = k)$

donc par le corollaire 1, $\mathbb{P}_{X_m}$ converge faiblement

vers P_X donc $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ □

④ Mg $IP(X_n = k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$ puis on aura le résultat par le corollaire 2.

$$X_n \hookrightarrow B(n, p_n) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad IP(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N} \quad p_n \in [0, 1]$ et $np_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda \in \mathbb{R}_+^*$ alors nécessairement $p_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

$$\text{Donc} \quad \ln(1-p_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -p_n + o(p_n)$$

$$\text{Donc} \quad n \ln(1-p_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} -\lambda + o(1)$$

$$\text{Donc} \quad (1-p_n)^n = e^{n \ln(1-p_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} e^{-\lambda + o(1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-\lambda}$$

$$\text{et} \quad p_n^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\lambda^k}{n^k} \quad \text{et} \quad (1-p_n)^k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 1$$

$$\text{Finalement, } IP(X_n = k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} \times \frac{\lambda^k}{n^k} \times e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

Donc par le corollaire 2, $(X_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers

$$X \subset \mathcal{P}(\lambda)$$
 □

Application:

• $B(n, p) * B(m, q)$: nb de succès parmi n exp de proba p et m de proba q .

$$\text{Si } B(n, p) * B(m, p) = B(n+m, p)$$

Supplément:

On suppose que ν est une mesure admettant comme densité f par rapport à μ . Alors, pour toute fonction mesurable g :

$$\int |g| d\nu = \int |g| f d\mu$$

et si cette quantité est finie, $\int g d\nu = \int g f d\mu$.

Démo:

Si $g = \mathbb{1}_A$, $\int_{\Omega} |g| d\nu = \int_{\Omega} \mathbb{1}_A d\nu = \int_A d\nu = \nu(A) = \int_A f d\mu$.

Si g est mesurable, $|g|$ est limite d'une suite croissante de fonctions étagées donc $\exists (e_n) \in \mathcal{E}^{\mathbb{N}}$ tq $e_n \rightarrow |g|$.

Par le thm de convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} e_n d\nu \right) = \int_{\Omega} |g| d\nu$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_{\Omega} e_n f d\mu \right) = \int_{\Omega} |g| f d\mu$$

$$\int_{\Omega} |g| f d\mu = \int_{\Omega} |g| d\nu$$

Si ces quantités sont finies, alors on écrit

$g = g^+ - g^-$ où g^+ et g^- sont positives, $\int g^+ < +\infty$ et $\int g^- < +\infty$
alors $\int_{\Omega} g^+ d\nu = \int_{\Omega} g^+ f d\mu$ et $\int_{\Omega} g^- d\nu = \int_{\Omega} g^- f d\mu$ donc

$$\int_{\Omega} (g^+ - g^-) d\nu = \int_{\Omega} (g^+ - g^-) f d\mu.$$

□