

Complément - différentielle exp. matricielle

[Rouvière P 117 - Ex 39]

Énoncé

- 1.) Soient E et F deux espaces normés, U un ouvert de E et une suite d'applications $f_k: U \rightarrow F$ différentiables sur U . On suppose que, pour $k \rightarrow +\infty$,
- (i) (f_k) CVS sur U
 - (ii) $(Df_k(x))$ converge dans $\mathcal{L}(E, F)$ uniformément pour $x \in U$.

• Étape 1: $Mq \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k$ est différentiable sur U .

On note f la limite simple de (f_k)

$\forall x \in U$, $g(x)$ la limite uniforme de $(Df_k(x))$.

Soit $\varepsilon > 0$,

par (ii) $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n \geq N \Rightarrow \forall x \in U, \|Df_n(x) - g(x)\|_F \leq \varepsilon)$ (*)

Soient $p, q \in \mathbb{N}$, $p \geq q \geq n$, on a alors

$\forall x \in U$, $\|Df_p(x) - Df_q(x)\|_F \leq 2\varepsilon$.

Soit $a \in U$, comme U est ouvert, $\exists \eta > 0$, $B(a; \eta) \subset U$.

Et $\forall x \in B(a; \eta)$, $\|(Df_p - Df_q)(x)\|_F \leq 2\varepsilon$

Comme $B(a; \eta)$ est convexe on peut appliquer

l'inégalité de la moyenne:

$$\forall (x, y) \in B(a, \eta), \| (f_p - f_q)(x) - (f_p - f_q)(y) \|_F \leq 2\varepsilon \|x - y\|.$$

Donc, si on pose $x = a$ et $y = a + h$ où $\|h\|_E < \eta$,

$$(a, a+h) \in B(a, \eta)^2$$

$$\| f_p(a) - f_p(a+h) + f_q(a+h) - f_q(a) \|_F \leq 2\varepsilon \|h\|_E.$$

Or si on fixe $q \in \mathbb{N}$, $q \geq N$, f_q est différentiable en a

$$\text{Donc } f_q(a+h) - f_q(a) = Df_q(a)(h) + \underbrace{o(\|h\|)}_{= \|h\| R(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0}.$$

$$\text{Donc } \exists \alpha > 0 \text{ tq pour } \|h\|_E \leq \alpha, \quad = \|h\| R(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

$$\| f_q(a+h) - f_q(a) - Df_q(a)(h) \|_F \leq \varepsilon \|h\|_E$$

$$\text{Et d'après } (*), \| Df_q(a) - g(a) \| \leq \varepsilon$$

$$\text{Donc } \| Df_q(a)(h) - g(a)(h) \|_F \leq \varepsilon \|h\|_E$$

$$\text{Donc si } \|h\|_E \leq \alpha, \| f_p(a) - f_p(a+h) - g(a)(h) \|_F$$

$$\leq \| f_p(a) - f_p(a+h) + f_q(a+h) - f_q(a) \|_F + \| f_q(a+h) - f_q(a)$$

$$- Df_q(a)(h) \|_F + \| Df_q(a)(h) - g(a)(h) \|_F$$

$$\leq 2\varepsilon \|h\|_E + \varepsilon \|h\|_E + \varepsilon \|h\|_E = 4\varepsilon \|h\|_E.$$

$$\text{Donc } \forall p \geq N, \forall h \in E, \|h\|_E \leq \alpha,$$

$$\| f_p(a) - f_p(a+h) - g(a)(h) \|_F \leq 4\varepsilon \|h\|_E$$

$$\text{Donc en faisant } p \rightarrow +\infty, \| f(a) - f(a+h) - g(a)(h) \| \leq 4\varepsilon \|h\|_E$$

$$\text{Donc } f \text{ est diff en } a \in U \text{ et } Df(a) = g(a).$$

$$\text{Donc } f = \lim_{k \rightarrow +\infty} (f_k) \text{ est diff sur } U \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} Df_k(a) = Df(a)$$

• Étape 2: si les f_k sont $\mathcal{C}^1$, f est $\mathcal{C}^1$

Comme les f_k sont $\mathcal{C}^1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ Df_k est continue sur U .

Comme $(Df_k)_k$ CVU sur U , la limite $\lim_{k \rightarrow \infty} Df_k = g$

également continue

or $g = Df$ donc Df est continue donc f est $\mathcal{C}^1$.

• Étape 4: application à l'exponentielle.

$$E = F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$\forall p \in \mathbb{N}$, $f_p: X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \frac{X^p}{p!} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est $\mathcal{C}^1$

$$\forall p \in \mathbb{N}, Df_p(X): H \mapsto \sum_{k=0}^{p-1} \frac{X^k H X^{p-1-k}}{p!}$$

On vérifie les hypothèses du thm précédent:

i) $\left(\sum_{k=0}^n f_k\right)_n$ converge simplement sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

ii) $\left(\sum_{k=0}^n Df_k(X)\right)_n$ converge dans $\mathcal{L}(E, F)$, normalement pour $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \text{En effet } \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \quad \|H\| \leq 1 \quad \|Df_k(X)(H)\| &= \left\| \sum_{k=0}^{p-1} \frac{X^k H X^{p-1-k}}{p!} \right\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{\|X\|^{p-1}}{p!} \times \|H\| \\ &\leq \frac{\|X\|^{p-1}}{(p-1)!} \end{aligned}$$

Donc $\forall R > 0, \forall X \in B(0; R)$

$$\|Df_k(X)\| \leq \frac{R^{p-1}}{(p-1)!} \leftarrow \text{terme g^{al} d'une suite cr.}$$

Donc

$\sum_k Df_k$ converge normalement donc uniformément sur $B(0;R)$.

Donc par le début de l'exercice

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} = \exp(X) \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } B(0;R)$$

et donc $\mathcal{C}^1$ sur E et

$$\begin{aligned} D\exp(X)(H) &= \sum_{k=0}^{+\infty} Df_k(X)(H) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{p=0}^{k-1} \frac{X^p H X^{k-1-p}}{k!} \end{aligned}$$

□