

DVT - Critère de Sylvester.

Lemme 1: Pour tout sev F de E , on a

$\dim(F) + \dim(F^\perp) \geq \dim(E)$, avec égalité si

q est non-dégénérée.

L'égalité $E = F \oplus F^\perp$ étant réalisée ssi la restriction de q à F est non-dégénérée.

Théorème 1: Il existe un unique couple $(s; t)$ d'entiers naturels tels que pour toute base $(e_i)_{i \in [1; n]}$ de E , orthogonale relativement à q , $\#\{i \in [1; n] \mid q(e_i) > 0\} = s$, $\#\{i \in [1; n] \mid q(e_i) < 0\} = t$. De plus $s + t = \text{rang}(q)$.

Théorème 2: En désignant par P (resp. $\mathcal{P}$) l'ensemble de tous les sev F de E tels que la restriction de q à F soit définie positive (resp. définie négative) (P ou $\mathcal{P}$ peut être vide), la signature $(s; t)$ de q est donnée par :

$$s = \begin{cases} 0 & \text{si } P = \emptyset \\ \max_{F \in P} (\dim(F)) & \text{si } P \neq \emptyset \end{cases} \quad t = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{P} = \emptyset \\ \max_{F \in \mathcal{P}} (\dim(F)) & \text{si } \mathcal{P} \neq \emptyset \end{cases}$$

Théorème 3: Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de q dans une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. La forme q est définie positive ssi tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs.

Formes quadratiques - Critère de Sylvester

Lemme 1 : Soit E un K -ev de dimension finie

$F \subset E$ un sev.

i) $\dim(F) + \dim(F^\perp) \geq \dim(E)$ avec égalité si q est non-dégénérée.

ii) $E = F \oplus F^\perp$ si $q|_F$ est non-dégénérée.

Démo i) option 1 : / [Gr 316]

• [Gourdon p.223] E de dim. finie, $F \subset E$, q forme quadratique ou hermitienne.

On considère l'application $\Phi: F \rightarrow E^*$ Φ est une
 $x \mapsto \Phi(\cdot; x)$

application linéaire et par le théorème du rang,

$$\dim(F) = \dim(\ker(\Phi)) + \dim(\operatorname{Im}(\Phi)).$$

$$\begin{aligned} \ker(\Phi) &= \{x \in F \mid \Phi(x; \cdot) = 0\} = \{x \in F \mid \forall y \in F, \Phi(x; y) = 0\} \\ &= \ker(q) \cap F. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(\Phi)^\circ &= \{x \in E \mid \forall l \in \operatorname{Im}(\Phi), l(x) = 0\} \\ &= \{x \in E \mid \forall y \in F, \Phi(y; x) = 0\} = F^\perp \end{aligned}$$

or on sait que comme $\operatorname{Im}(\Phi)^\circ \subset E$,

$$\dim(E) = \dim(\operatorname{Im}(\Phi)) + \dim(\operatorname{Im}(\Phi)^\circ) \quad (*1)$$

$$\text{donc } \dim(\operatorname{Im}(\Phi)) = \dim(E) - \dim(\operatorname{Im}(\Phi)^\circ)$$

$$\text{donc } \dim(F) = \dim(F \cap \ker(q)) + \dim(E) - \dim(F^\perp)$$

$$\text{donc } \dim(F) + \dim(F^\perp) \geq \dim(E)$$

avec égalité si $\dim(F \cap \ker(q)) = 0$ donc en particulier si q est non-dégénérée. $\square$

• complément (*1): $\dim(E) = \dim(A) + \dim(A^\circ)$
[Gaudon 128]

Soit E un K -ev de dim finie

Soit $A \subseteq E^*$ un sev de E^*

$$A^\circ = \{x \in E \mid \forall \varphi \in A, \varphi(x) = 0\}$$

Soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_r)$ une base de A on la complète en une base de E^* : $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$.

on prend la base anti-duale $(e_1, \dots, e_n)$. Mg $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est une base de A° .

Soit $a \in A^\circ$, $a \in E$ donc $\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in K^m$ tq $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_m e_m$.

$$\forall i \in [1, r], \varphi_i(a) = \alpha_1 \varphi_i(e_1) + \dots + \alpha_m \varphi_i(e_m) = \alpha_i = 0 \text{ car } a \in A^\circ$$

donc finalement $a = \alpha_{r+1} e_{r+1} + \dots + \alpha_n e_n$.

donc $(e_{r+1}, \dots, e_n)$ est génératrice et libre donc base de A° . $\square$

Démo 2) option 2:

[Rembaldi P470] E de dim finie, $F \subseteq E$ sev

si $F = \{0\}$ $F^\perp = E$ donc $\dim(E) = \dim(F^\perp) + \dim(F)$.

Si $F \neq \{0\}$, soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de F .

Soit $(l_1, \dots, l_r)$ les formes linéaires tq $l_i(x) = \varphi(x, e_i)$.

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, \varphi(x, y) = 0\} = \{x \in E \mid \forall i \in [1, r] l_i(x) = 0\}$$

donc $F^\perp = \ker(f)$ où $f: E \rightarrow \mathbb{K}^r$ $x \mapsto (l_1(x), \dots, l_r(x))$

donc comme f est linéaire, par le thm du rang,

$$\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \text{rang}(f)$$

$$= \dim(F^\perp) + \text{rang}(f)$$

$$\text{or } \text{rang}(f) = \text{rang}(l_1, \dots, l_r) \leq \dim(F)$$

$$\text{donc } \dim(E) \leq \dim(F^\perp) + \dim(F)$$

et $\text{rang}(f) = r$ si $(l_1, \dots, l_r)$ est libre. Si q est non-dég,

c'est le cas, et $\dim(E) = \dim(F^\perp) + \dim(F)$.

Démo ii) option 1: [Gn 316]

$$\boxed{\Rightarrow} \text{Supp } E = F \oplus F^\perp, \text{ soit } x \in \ker(q|_F),$$

$$\forall y \in F \quad \varphi(x, y) = 0 \text{ donc } x \in F \cap F^\perp \text{ donc } x = 0$$

$$\text{donc } \ker(q|_F) = \{0\}$$

$$\boxed{\Leftarrow} \text{Supp } q|_F \text{ non-dégénérée,}$$

$$\ker(q|_F) = \{x \in F \mid \forall y \in F \quad \varphi(x, y) = 0\} = \{0\}$$

$$\ker(q) \cap F = \{x \in F \mid \forall y \in E \quad \varphi(x, y) = 0\} \subset \ker(q|_F) = \{0\}$$

$$\text{donc } \dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp) \text{ et } F \cap F^\perp = \{0\}$$

$$\text{donc } E = F \oplus F^\perp$$

Démo. ii) option 2:

on suppose $q|_F$ non-dégénérée.

$$\{x \in F \mid \forall y \in F, \varphi(x, y) = 0\} = \{0\}$$

$$\text{Mq } \text{rang}(f) = r.$$

Soient $(\alpha_1, \dots, \alpha_r) \in K^r$ tels que $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r = 0$

$$\text{Alors } \forall x \in E, \alpha_1 \varphi(x, e_1) + \dots + \alpha_r \varphi(x, e_r) = 0$$

$$\text{donc } \forall x \in E, \varphi(x, \underbrace{\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r}_{\in F}) = 0$$

$$\text{donc en particulier } \forall x \in F, \varphi(x, \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r) = 0$$

$$\text{donc } \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r \in \ker(q|_F) = \{0\} \text{ donc } \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_r e_r = 0$$

$$\text{donc } \alpha_1 = \dots = \alpha_r = 0.$$

$$\text{donc } (e_1, \dots, e_r) \text{ est libre donc } \text{rang}(e_1, \dots, e_r) = r$$

$$\text{donc } \text{rang}(f) = r \text{ donc } \dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$$

$$\text{Mq } F \cap F^\perp = \{0\}.$$

$$\text{Soit } x \in F \cap F^\perp, \forall y \in F, \varphi(x, y) = 0 \text{ donc } x \in \ker(q|_F) = \{0\}.$$

$$\text{donc } F \oplus F^\perp \subseteq E \text{ et } \dim(F \oplus F^\perp) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$$

$$= \dim(E)$$

$$\text{donc } F \oplus F^\perp = E.$$

□

Théorème 15.29 [Rem 479]:

Il existe un unique couple (s, t) d'entiers naturels tel que pour toute base de E , $\perp$ relativement à q , $\#\{i \in [1, n] \mid q(e_i) > 0\} = s$
 $\#\{i \in [1, n] \mid q(e_i) < 0\} = t$

et $s + t = \text{rang}(q)$.

Démo: soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases q -orthogonales telles que

$$\text{Mat}_B(q) = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \begin{array}{c} \downarrow s \\ >0 \end{array} & \\ & \begin{array}{c} \downarrow t \\ <0 \end{array} & \\ & & \begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \right) \quad s+t=r$$

$$\text{Mat}_{B'}(q) = \left(\begin{array}{c|c|c} & & \\ \hline & \begin{array}{c} \downarrow s' \\ >0 \end{array} & \\ & \begin{array}{c} \downarrow t' \\ <0 \end{array} & \\ & & \begin{array}{c} \downarrow \\ 0 \end{array} \\ \hline \end{array} \right) \quad s'+t'=r$$

mq $s = s'$ et $t = t'$

Il suffit donc de mq $s = s'$ ou $t = t'$ pour avoir le résultat.

Soit $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_s)$ et $G' = \text{Vect}(e'_{s+1}, \dots, e'_n)$

$\forall x \in F \setminus \{0\} \quad x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_s e_s$

$$q(x) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_s x_s^2 > 0$$

et $\forall x \in G, q(x) \leq 0$ donc $F \cap G = \{0\}$

Si $S = 0$, $F = \{0\}$, même chose.

Comme $\dim(F) + \dim(G') \leq \dim(E)$

$$\text{Donc } S + n - S' \leq n$$

$$\text{Donc } S - S' \leq 0$$

$$\text{Donc } S \leq S'$$

En permutant les rôles de S et S' , $S' \leq S$

Donc $S = S'$ donc $t = t'$. Ceci l'unicité du couple $(S; t)$

Théorème 3: [15.31 P 480 Rom]

En désignant par P (resp. $\mathcal{N}$) l'ensemble de tous les s.e.v. F de E tq $q|_F$ soit définie positive (resp. définie négative) (P ou $\mathcal{N}$ peut être vide), la signature

$(s; t)$ de q est donnée par:

$$s = \begin{cases} 0 & \text{si } P = \emptyset \\ \max_{F \in P} (\dim(F)) & \text{si } P \neq \emptyset \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathcal{N} = \emptyset \\ \max_{G \in \mathcal{N}} (\dim(G)) & \text{si } \mathcal{N} \neq \emptyset \end{cases}$$

Démo: Soit s', t' tels que définis dans l'énoncé, (s, t) la signature de q .

Par définition de la signature, $s \leq s'$ et $t \leq t'$.

Soit $F \in P$ tel que $\dim(F) = s'$.

Soit $B = (e_1, \dots, e_{s'})$ une base q -orthogonale de F .

Comme q est définie positive sur F elle est non-dégénérée donc par le lemme 1, $F \oplus F^\perp = E$.

donc il existe une base q - $\perp$ de $F^\perp$ $C = (e_{s'+1}, \dots, e_n)$.

tq $B = (e_1, \dots, e_n)$ soit une base q - $\perp$ de E .

Par définition de s' , $q(e_i) \leq 0 \quad \forall i \in [s'+1, n]$. Donc $s = s'$ par le théorème précédent. De même on mg $t = t'$. $\square$

Application pour la leçon déterminant:

Théorème [15.33 Rem 481]:

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ la matrice de q dans une base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$. q est définie positive ssi tous les mineurs principaux de A sont strictement positifs.

Démo:

$\Rightarrow$ Si q est définie positive sur E , alors, si $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , $A_k = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq k}$ est la matrice de $q|_{E_k}$ où $E_k = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.

Comme q est définie positive, $\det(A_k) > 0$.

$(\text{Mat}(q) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix})$ où $\lambda_i > 0$ dc $\det(\text{Mat}(q)) > 0$.

$\Leftarrow$ Supposons que tous les mineurs principaux de A sont positifs. Mg A est définie positive.

On va raisonner par récurrence:

Initialisation: $n=1$. $E = \langle e \rangle$. $A = \text{Mat}_B(q) = (\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

comme $\det(A) > 0$ donc q est définie positive.

Hérédité: Soit $n \geq 2$ sup. $H(n-1)$ vraie.

On a alors $\det(A_{n-1}) > 0$ donc $q|_{E_{n-1}}$ est définie

positive par H.R. donc la signature de $q|_{E_{n-1}}$ est $(n-1, 0)$.

et donc la signature de q est $(n-1; 1)$ ou $(n; 0)$.

Si $\text{sgn}(q) = (n-1; 1)$, par la loi d'inertie de Sylvester, que il existe une base B' dans laquelle A est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$ donc $\det(A) = -1$

or $\det(A) > 0$. Contradiction.

La signature de q est $(n; 0)$ et q est définie positive.