

Caractérisation des fonctions convexes

différentiables:

Références: [Rou 127-329] [Gou 367]

Énoncé:

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$. On suppose f différentiable. On a alors les équivalences:

- (i) f est convexe
- (ii) $\forall (x, y) \in U^2$ $df_x(y-x) \leq f(y) - f(x)$
(ce qui s'écrit aussi $\forall (x, y) \in U^2$ $\langle \nabla f(x), y-x \rangle \leq f(y) - f(x)$)
- (iii) ∇f est "monotone", $\forall (x, y) \in U^2$ $\langle \nabla f(y) - \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0$
- (iv) si f est deux fois dérivable, $Hf(x)$ est positive $\forall x \in U$

Étapes:

Étape 1: (i) $\Rightarrow$ (ii) écrire $f(x+t(y-x)) = f(x) + \langle \nabla f, \dots \rangle$ puis $\div t$ et $t \rightarrow 0$

(ii) $\Rightarrow$ (i) prendre un point intermédiaire $z = x+t(y-x)$ et écrire l'inég (ii) entre x et z et z et y

Étape 2: (ii) $\Rightarrow$ (iii) sommer deux fois l'inég x/y et y/x

(iii) $\Rightarrow$ (ii) utiliser une fonction intermédiaire $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ et IAF généralisée sur $[0,1]$.

Étape 3: (ii) $\Rightarrow$ (iv) écrire Taylor-Young

(iv) $\Rightarrow$ (ii) si $f \in \mathcal{C}^2$ Taylor avec reste intégral

sinon utiliser $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ et Taylor-Lagrange.

Caractérisation des fonctions convexes

différentiables:

Étape 1: $i) \Rightarrow ii)$ $\forall (x, y) \in U^2, \forall t \in [0, 1]$, on suppose

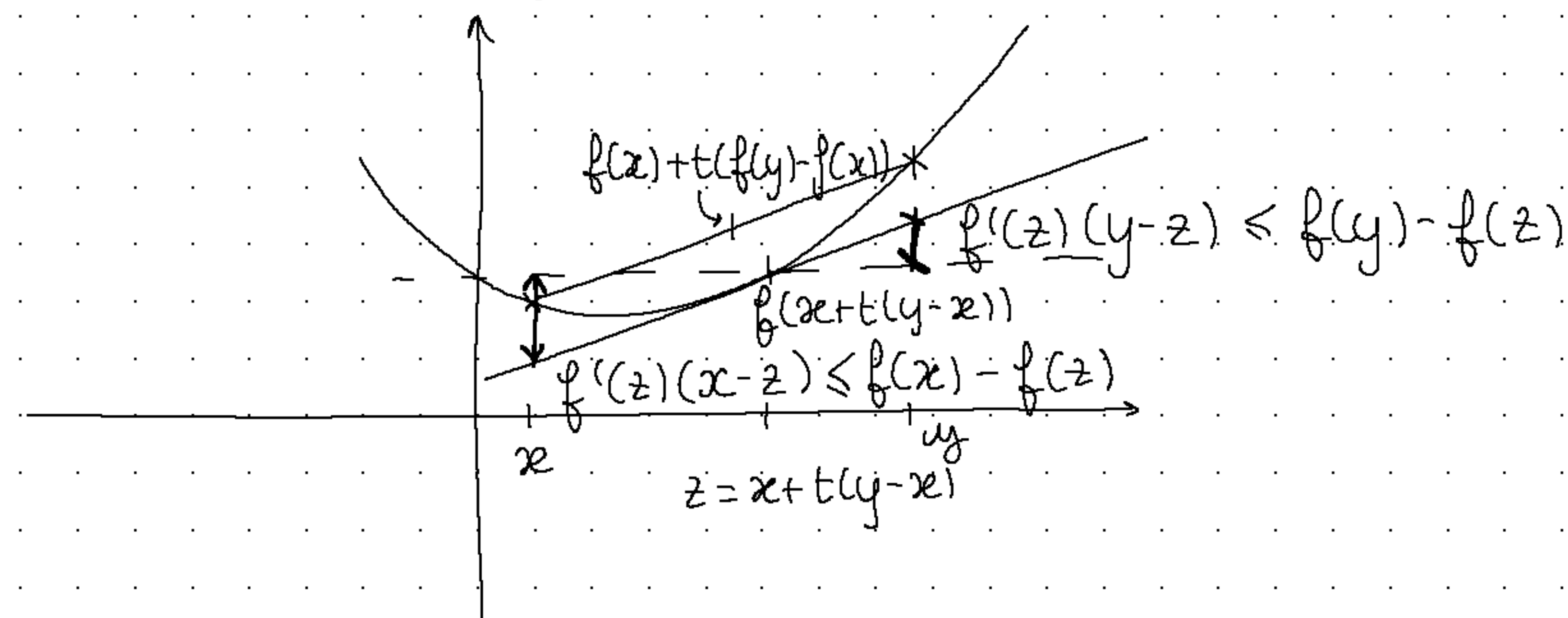
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Soit $(x, y) \in U^2, t \in [0, 1]$, comme f est différentiable et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$f(x + t(y-x)) = f(x) + \langle \nabla f(x), t(y-x) \rangle + |t|\varepsilon(t)$$

$$\text{donc } f(x) + t\langle \nabla f(x), y-x \rangle + |t|\varepsilon(t) \leq f(x) + t(f(y) - f(x))$$

$$\text{donc } \langle \nabla f(x), y-x \rangle \leq f(y) - f(x) \text{ avec } \div t \text{ puis } t \rightarrow 0.$$



$ii) \Rightarrow i)$ Soit $(x, y) \in U^2, t \in [0, 1]$, on a

$$\langle \nabla f(z), x-z \rangle \leq f(x) - f(z) \quad (1)$$

$$\langle \nabla f(z), y-z \rangle \leq f(y) - f(z) \quad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow \langle \nabla f(z), x - (x + t(y-x)) \rangle \leq f(x) - f(z)$$

$$\Leftrightarrow t \langle \nabla f(z), x-y \rangle \leq f(x) - f(z)$$

$$\Leftrightarrow -t \langle \nabla f(z), y-x \rangle \leq f(x) - f(z)$$

$$\text{et } ② \Leftrightarrow \langle \nabla f(z); y - x - t(y - x) \rangle \leq f(y) - f(z)$$

$$\Leftrightarrow \langle \nabla f(z); (1-t)(y-x) \rangle \leq f(y) - f(z)$$

$$\Leftrightarrow (1-t) \langle \nabla f(z); y-x \rangle \leq f(y) - f(z)$$

Donc en faisant $(1-t)① + t②$ on obtient

$$0 \leq (1-t)(f(x) - f(z)) + t(f(y) - f(z))$$

$$f(z) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

Étape 2 : (ii) $\Rightarrow$ (iii) Soit $(x, y) \in \mathcal{U}^2$, $t \in [0; 1]$, on sup.

$$\langle \nabla f(x); y - x \rangle \leq f(y) - f(x) \quad ①$$

$$\text{Mq } \langle \nabla f(x) - \nabla f(y); x - y \rangle \geq 0$$

$$\text{on a } \langle \nabla f(y); x - y \rangle \leq f(x) - f(y) \quad ②$$

donc avec ① + ②

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y); y - x \rangle \leq 0$$

$$\text{i.e. } \langle \nabla f(x) - \nabla f(y); x - y \rangle \geq 0$$

(iii) $\Rightarrow$ (ii) on dispose d'info sur les différentielles et on veut remonter. on va utiliser une application dériv-

vable $\varphi: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto f(x + t(y - x))$$

φ est dér. comme composée de deux applications diff.

$$\forall t \in [0; 1] \quad \varphi'(t) = \langle \nabla f(x + t(y - x)); y - x \rangle$$

$$\text{et } \varphi'(0) = \langle \nabla f(x); y - x \rangle$$

$$\text{or d'après (iii) } \langle \nabla f(x + t(y - x)) - \nabla f(x); x + t(y - x) - x \rangle \geq 0$$

Donc $\forall t \in [0;1] \quad \varphi'(t) \geq \varphi'(0)$

Donc par l'inégalité des accroissements finis généralisée, on a :

$$\varphi(1) - \varphi(0) \geq \varphi'(0)$$

Donc $f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x); y - x \rangle$

Étape 3: (ii) $\Rightarrow$ (iv) On suppose f deux fois

différentiable. Soit $(x, y) \in \mathcal{U}^2$, on suppose

$$\langle \nabla f(x); y - x \rangle \leq f(y) - f(x)$$

Par la formule de Taylor-Young, pour $w \in \mathbb{R}^n$

$$f(x + tw) = f(x) + \langle \nabla f(x); tw \rangle + \frac{t^2}{2} \langle Hf(x) w; w \rangle + t^2 \varepsilon(t)$$

$$\text{Donc } \frac{t^2}{2} \langle Hf(x) w; w \rangle + t^2 \varepsilon(t) = f(x + tw) - f(x) - \langle \nabla f(x); tw \rangle$$

Donc par hypothèse on a

$$f(x + tw) - f(x) \geq \langle \nabla f(x); x + tw - x \rangle = \langle \nabla f(x); tw \rangle$$

$$\text{donc } \frac{t^2}{2} \langle Hf(x) w; w \rangle + t^2 \varepsilon(t) \geq 0$$

$$\text{donc en divisant par } t^2 \text{ puis } t \rightarrow 0, \langle Hf(x) w; w \rangle \geq 0$$

(iv) $\Rightarrow$ (iii). Si f est $\mathcal{C}^2$, par la formule de T.R.I,

$$f(y) - f(x) - \langle \nabla f(x); y - x \rangle = \int_0^1 (1-t) \langle Hf(x + t(y-x)) (y-x); (y-x) \rangle dt \geq 0$$

• Si f n'est pas $\mathcal{C}^2$, alors on se ramène à

$\varphi: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ φ est dérivable deux fois
 $t \mapsto f(x+t(y-x))$ sur $[0;1]$

Donc par Taylor-Lagrange, $\exists c \in]0;1[$ tel que

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2} \varphi''(c)t^2$$

on a alors

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2} \varphi''(c)$$

$$\text{donc } f(y) = f(x) + \langle \nabla f(x), y-x \rangle + \underbrace{\frac{1}{2} \langle Hf(x+c(y-x))(y-x), y-x \rangle}_{\geq 0}$$

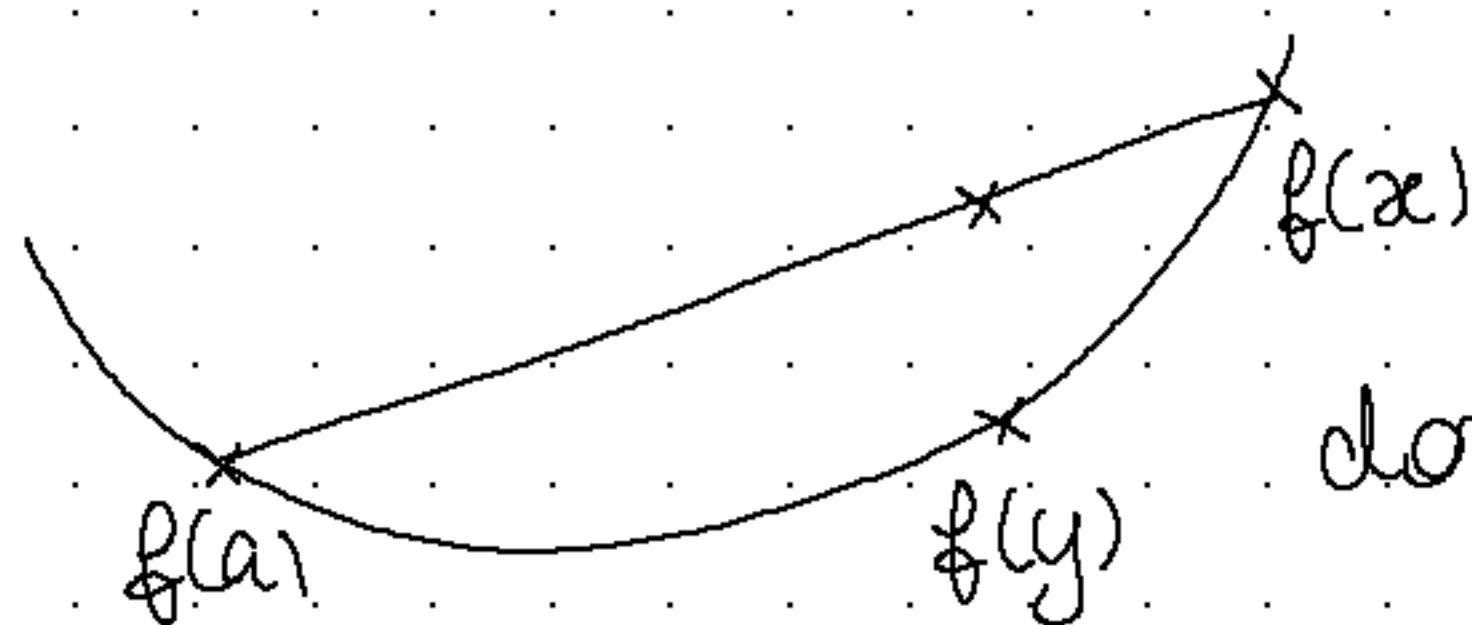
Inégalité des pentes:

① Soit $a \in \mathbb{R}$, $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Alors $f: x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

Démo: soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on suppose $x > y$ et $x > a$.

▷ cas 1: si $y > a$, alors

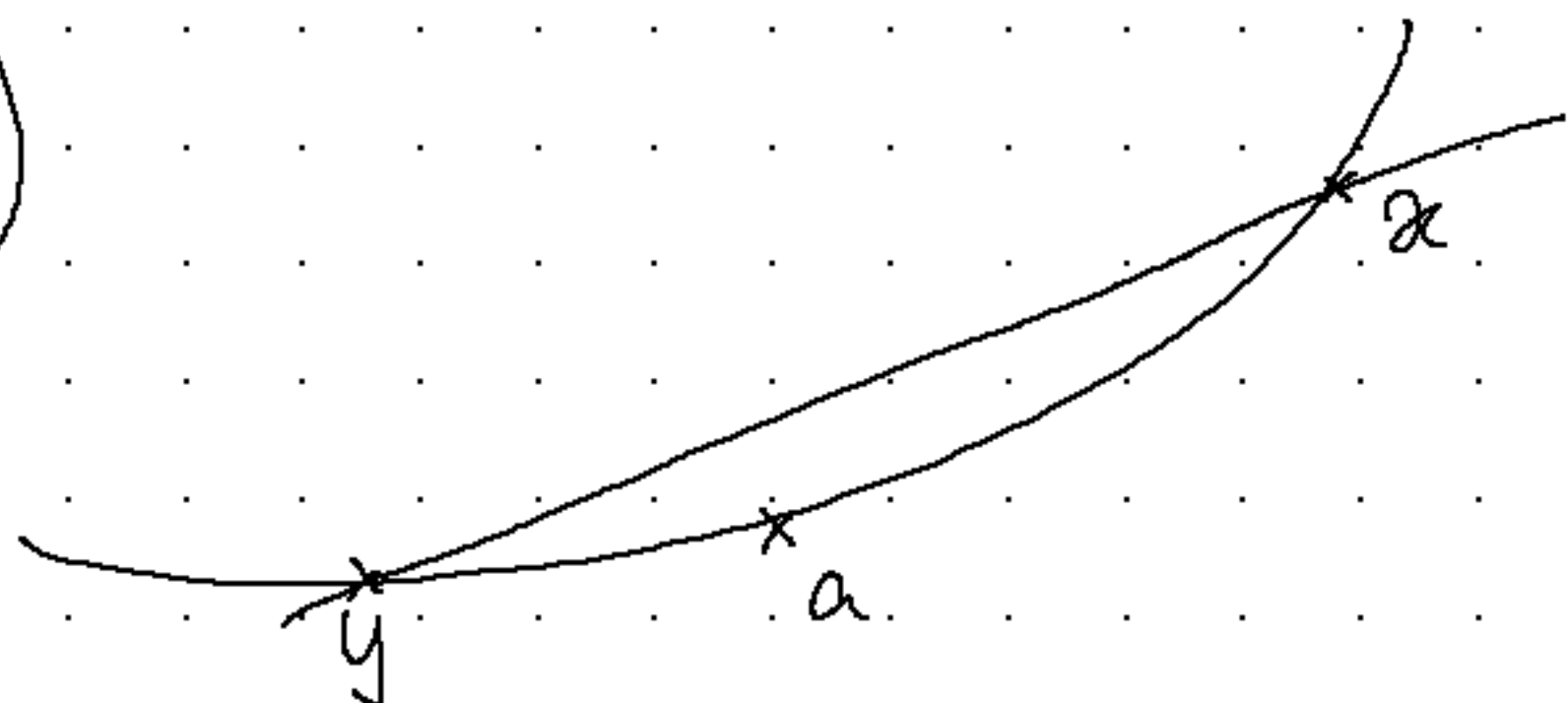


$$f(y) \leq f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x-a} (y-a)$$

$$\text{donc } \frac{f(y) - f(a)}{y-a} \leq \frac{f(x) - f(a)}{x-a}$$

$$\left(y = \frac{x-y}{x-a} \times a + \left(1 - \frac{x-y}{x-a} \right) x \right)$$

▷ cas 2: si $y < a$,



$$f(a) \leq f(y) + \frac{f(x) - f(y)}{x - y} (a - y)$$

$$\text{donc } (x - y)f(a) \leq (x - y)f(y) + (f(x) - f(y))(a - y)$$

$$\text{donc } (x - y)f(a) \leq xf(y) + (a - y)f(x) - af(y)$$

$$\text{donc } (x - a)f(a) - (y - a)f(a) \leq (x - a)f(y) - (y - a)f(x)$$

$$\text{donc } \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq \frac{f(y) - f(a)}{y - a}$$

Réciproquement si $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

est croissante $\forall a \in \mathbb{R}$.

Alors si on prend $(x, y) \in \mathbb{R}, t \in [0, 1]$

$$z = x + t(y - x) \quad x \leq z \leq y$$

$$\text{donc } \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

$$\text{donc } (y - z)f(x) - (y - z)f(z) \leq (x - z)f(y) - (x - z)f(x)$$

$$\begin{aligned} \text{donc } f(z)(x - y) &\leq xf(y) - yf(x) + z(f(x) - f(y)) \\ &\leq xf(y) - yf(x) + (x + t(y - x))(f(x) - f(y)) \\ &\leq f(x)(x - y) + t(y - x)(f(x) - f(y)) \end{aligned}$$

$$\text{donc } f(z) \leq f(x) + t(f(y) - f(x))$$

② Corollaire

$$a < b < c \quad \text{alors} \quad \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(c) - f(a)}{c - a} \leq \frac{f(c) - f(b)}{b - c}$$