

Calcul de sommes de séries à l'aide des séries de Fourier:

Référence: Gaudon Analyse

Énoncé: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Étapes:

Ⓔ) Mg pour f à valeurs réelles,

$$f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx))$$

et que pour une fonction paire $b_n(f) = 0$

Ⓔ) avec $x = \pi$ et $x = 0$ calculer les deux premières sommes

Ⓔ) Mg Parseval s'écrit $\|f\|_2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n(f)|^2$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} |b_n(f)|^2$$

et calculer la dernière somme.

(E1) Calculer les coeffs. de Fourier de f :

Comme f est à valeurs réelles et paires, il suffit de calculer les coefficients a_n .

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) dx = \frac{1}{\pi} \left(2\pi - \left[\frac{x^3}{3\pi^2}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \cos(nx) dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\sin(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

$$= -\frac{1}{\pi^3} 2 \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx$$

$$= -\frac{2}{\pi^3} \left(\left[\cancel{x^2} - \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} 2x \frac{\sin(nx)}{n} dx \right)$$

$$= -\frac{4}{\pi^3} \left(\left[x \frac{\cos(nx)}{n^2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos(nx)}{n^2} dx \right)$$

$$= -\frac{4}{\pi^3} \frac{\pi (-1)^n}{n^2} = \frac{(-1)^{n+1} 4}{\pi^2 n^2}$$

Comme f est $\mathcal{C}^1$ sur $[-\pi; \pi]$, elle est à $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et continue en tout $x \in \mathbb{R}$ donc par le théorème de Dirichlet,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(f) e^{-in x} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(f) \cos(nx) + \frac{a_0(f)}{2}$$

$$\text{Donc } \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{4}{\pi^2 n^2} \cos(nx) + \frac{4}{3} \times \frac{1}{2}$$

▷ En faisant $x = \pi$:

$$\text{Ainsi, } \underset{\substack{|| \\ 0}}{f(\pi)} = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \times 4 \times (-1)^n}{\pi^2 n^2}$$

$$\text{Donc } \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2}{3}$$

$$\text{D'où } \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

▷ En faisant $x = 0$:

$$f(0) = 1 = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} \times 4}{\pi^2 n^2}$$

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \left(\frac{2}{3} - 1\right) \frac{\pi^2}{4} = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12}$$

$$\text{D'où } \boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}} \quad = \frac{\pi^2}{4}$$

▷ la formule de Parseval donne ensuite

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) + |c_0(f)|^2$$

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

$$a_n(f) + i b_n(f) = 2c_{-n}(f)$$

$$c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + i b_n(f)}{2} \quad c_n(f) = \frac{a_n(f) - i b_n(f)}{2}$$

Et donc comme ici $b_n(f) = 0$,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{a_n(f)}{2} \right|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n(f)|^2}{2} + \frac{|a_0(f)|^2}{4}$$

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} 4}{\pi^2 n^2} \right|^2 \frac{1}{2} + \left| \frac{4}{3} \right|^2 \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{8}{\pi^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{4}{9}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{2x^2}{\pi^2} + \frac{x^4}{\pi^4} \right) dx = \frac{8}{\pi^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{4}{9}$$

$$\frac{1}{2\pi} \left(2\pi - \frac{2 \times 2\pi^3}{3\pi^2} + \frac{2\pi^5}{5\pi^4} \right) = \frac{8}{\pi^4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{4}{9}$$

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15 - 10 + 3}{15} = \frac{8}{15}$$

$$\frac{8}{15} - \frac{4}{9} = \frac{24 - 20}{45} = \frac{4}{45} \quad \text{donc}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}}$$

Compléments:

$$(+)\ c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$$

$\Downarrow$

$$(+)\ c_n(f) = \frac{1}{(in)^p} c_n(f^{(p)})$$

$\Downarrow$

$$(+)\ \text{Si } f \text{ est } 2\pi\text{-périodique et } \mathcal{L}^p \text{ alors } c_n(f) = o\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

(+) Noyau de Dirichlet:

$$\forall m \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, D_m(x) = \sum_{k=-m}^m e^{ikx}$$

(+) Noyau de Fejér

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, K_m(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} D_k(x)$$

$$(+)\ \forall f \in \mathcal{D}, \forall m \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2\pi} D_m * f = p_m(f) = \sum_{k=-m}^m c_k(f) e_k$$

$\underbrace{\quad}_{x \mapsto e^{ikx}}$

$$\frac{1}{2\pi} K_m * f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} p_k(f)$$

(+) $(K_m)_{m \geq 1}$ est une approx de l'unité 2π -pér, donc

$$\forall f \in \mathcal{D}, \forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{m-1} p_k(f)(x) \right) = f(x)$$

$\Downarrow$

(+) Si $(f, g) \in \mathcal{D}^2$ et $\forall m \in \mathbb{Z} \ c_m(f) = c_m(g)$ alors $f = g$

(+) $(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$ n'est pas une approximation de l'unité. On a alors un autre thm (Jordan-Dirichlet):

▷ Si $f \in \mathcal{D}$ et f est $\mathcal{L}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. Alors

1) $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (p_n(f)(x)) = f(x)$

2) Si f est de plus continue, la convergence est normale.