

Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire :

Référence : [Bernis] [Dantzer]

Théorème : Soit $n \geq 1$, $A : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$, $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux applications continues.

Soit $y_0 \in \mathbb{R}^n$, le problème de Cauchy suivant :

$$(P) \begin{cases} y' = A(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution globale.

Étapes :

(E1) Reformulation en pb de point fixe

(E2) $\exists!$ point fixe / solution

(E3) Solution globale.

Étape 1: Reformulation du problème

Soit $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ et $(t_0; y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$,

alors une application y est solution du problème de Cauchy sur I , $(\mathcal{E}) = \begin{cases} y' = A(t)y + B(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$

ssi y est solution dans $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ de l'équation

$$\forall t \in I, \quad y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t (A(x)y(x) + B(x)) dx \quad (1)$$

En effet:

$\Rightarrow$ Si y est solution de $(\mathcal{E})$ alors $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ et

$f: t \in I \mapsto A(t)y(t) + B(t)$ est continue sur I

Donc par le thm fondamental de l'analyse on a

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t (A(x)y(x) + B(x)) dx \quad \forall t \in I,$$

d'où y solution de l'équation (1).

$\Leftarrow$ Si $y \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ est solution de (1) alors on a:

$f: t \in I \mapsto A(t)y(t) + B(t)$ continue sur I et

donc par le thm fondamental de l'analyse

$$F: t \in I \mapsto \int_{t_0}^t (A(x)y(x) + B(x)) dx \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$$

Donc comme $\forall t \in I \quad y(t) = y_0 + F(t)$ on a $y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$

et $y'(t) = F'(t) = A(t)y(t) + B(t)$ pour tout $t \in I$ ce

qui, avec $y(t_0) = y_0$ nous donne y solution de $(\mathcal{E})$.

On pose alors

$$L_I: \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$$

$$\varphi \mapsto y_0 + \int_{t_0}^t A(x) \varphi(x) + B(x) dx$$

qui est linéaire et bien définie sur $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ et à
valeur dans $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n)$ par le théorème fondamental
de l'analyse. $\hookrightarrow \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$

ainsi, y est solution de (E)ssi y est un point
fixe de L_I .

(E2) Existence du point fixe:

On va chercher à appliquer le théorème
du point fixe de Banach-Picard dont l'énoncé est:

[Si (E, d) est un espace métrique complet, $f: E \rightarrow E$ et
 $p \in \mathbb{N}^*$ tel que f soit contractante (i.e.
 $\forall (x, y) \in E^2, d(f(x), f(y)) \leq k \cdot d(x, y)$).

[Alors f admet un unique point fixe $\ell \in E$

Si $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ non-vide, alors $(\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$
est complet. Mq $\exists p \in \mathbb{N}$ tq $L_{[a, b]}^p$ soit contractante

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_n(\mathbb{R})}$
récurrente que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$H(k) = \{ \forall t \in [a, b],$$

$$\|L_{[a,b]}^k(y_1)(t) - L_{[a,b]}^k(y_2)(t)\| \leq \frac{(M|t-t_0|)^k}{k!} \|y_1 - y_2\|_\infty$$

est vraie.

$$\underline{k=0}: \quad \forall t \in [a,b] \quad \|y_1(t) - y_2(t)\| \leq \|y_1 - y_2\|_\infty$$

$k \in \mathbb{N}^*$: On suppose $\mathcal{H}(k-1)$ vraie. Soit $t \in [a,b]$,

$$\begin{aligned} L_{[a,b]}^{k+1}(y_1)(t) - L_{[a,b]}^{k+1}(y_2)(t) &= L_{[a,b]}^k(y_1)(t_0) - L_{[a,b]}^k(y_2)(t_0) \\ &+ \int_{t_0}^t A(x) (L_{[a,b]}^k(y_1)(x) - L_{[a,b]}^k(y_2)(x)) dx \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \|L_{[a,b]}^{k+1}(y_1)(t) - L_{[a,b]}^{k+1}(y_2)(t)\| \leq \|L_{[a,b]}^k(y_1)(t_0) - L_{[a,b]}^k(y_2)(t_0)\| + \int_{t_0}^t M \|L_{[a,b]}^{k-1}(y_1)(x) - L_{[a,b]}^{k-1}(y_2)(x)\| dx$$

Donc par $\mathcal{H}(k-1)$

$$\begin{aligned} \|L_{[a,b]}^{k+1}(y_1)(t) - L_{[a,b]}^{k+1}(y_2)(t)\| &\leq \int_{t_0}^t M \times \frac{(M|x-t_0|)^{k-1}}{(k-1)!} \|y_1 - y_2\|_\infty dx \\ &\leq \frac{M^k}{(k-1)!} \left[\frac{|x-t_0|^k}{k} \right]_{t_0}^t \|y_1 - y_2\|_\infty \\ &\leq \frac{M^k |t-t_0|^k}{k!} \|y_1 - y_2\|_\infty \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{H}(k)$.

Donc par principe de récurrence, $\mathcal{H}(k)$ est vraie $\forall k \in \mathbb{N}$.

Donc comme $t, t_0 \in [a,b]$, $|t-t_0| \leq |b-a|$

Donc $\forall t \in [a,b], \forall k \in \mathbb{N}$

$$\|L_{[a,b]}^{k+1}(y_1)(t) - L_{[a,b]}^{k+1}(y_2)(t)\| \leq \frac{(M|b-a|)^k}{k!} \|y_1 - y_2\|_\infty$$

d'où $\|L_{[a;b]}^{kH}(y_1) - L_{[a;b]}^{kH}(y_2)\|_{\infty} \leq \frac{(M(b-a))^k}{k!} \|y_1 - y_2\|_{\infty}$

et comme $\frac{(M(b-a))^k}{k!} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$ $\frac{(M(b-a))^N}{N!} < 1$ *terme général d'une série exponentielle*

$\frac{(M(b-a))^k}{k!} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$, alors $\exists N \in \mathbb{N}$ $\frac{(M(b-a))^N}{N!} < 1$

Donc $L_{[a;b]}^N$ est contractante.

Donc par le corollaire du thm du point fixe, $L_{[a;b]}^N$ a un unique point fixe $y \in \mathcal{C}([a;b]; \mathbb{R})$.

Ainsi comme $L_{[a;b]}^N(y) = y$, $L_{[a;b]}^{NH}(y) = L_{[a;b]}^N(y)$

Donc $L_{[a;b]}(y)$ est un point fixe de $L_{[a;b]}^N$ donc

par unicité, $L_{[a;b]}(y) = y$.

Donc y est un point fixe de $L_{[a;b]}$.

Comme tout point fixe de $L_{[a;b]}$ est point fixe de $L_{[a;b]}^N$, on en déduit l'unicité de y comme point fixe de $L_{[a;b]}$.

Donc y est l'unique solution définie sur $[a;b]$ de (E).

(E3) Construction d'une solution globale

$\forall p \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_p = [t_0 - p; t_0 + p]$, $\forall p \in \mathbb{N}^*$, on a une unique solution φ_p de (E) sur I_p .

$\forall t \in \mathbb{R}$, $\exists p \in \mathbb{N}^*$ tq $t \in I_p$. On pose alors

$\forall t \in \mathbb{R}$, $p(t) = \min\{p \in \mathbb{N}^* \mid t \in I_p\}$

on pose ensuite $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ $t \mapsto \varphi_{p(t)}(t)$

On a $t_0 \in I_1$ donc $\varphi(t_0) = \varphi_1(t_0) = y_0$.

Soit $t \in \mathbb{R}$, $t \in I_{p(t)} \subset I_{p(t)+1}$.

t est donc intérieur à $I_{p(t)+1}$, et par unicité de la solution à (E) sur $I_{p(t)+1}$, $\varphi_{p(t)}$ et $\varphi_{p(t)+1}$ coïncident

sur I_p . Donc en particulier, φ coïncide avec $\varphi_{p(t)+1}$ sur $I_{p(t)+1}$. ($\varphi_{p(t)+1}$ prolonge $\varphi_{p(t)}$ en une fonction

dérivable sur $I_{p(t)+1}$). Et φ est donc dérivable en t ,

$$\varphi'(t) = A(t)\varphi(t) + B(t) \quad \text{et} \quad \varphi(t_0) = y_0.$$

Ceci étant valable pour tout $t \in \mathbb{R}$, φ est alors solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Toute autre solution $\tilde{\varphi}$ sur $\mathbb{R}$ coïncide avec $\varphi_{p(t)+1}$ donc φ sur $]t_0 - p(t) - 1; t_0 + p(t) + 1[$ donc avec φ .

$$\text{Donc } \tilde{\varphi} = \varphi.$$

Donc φ est l'unique solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Compléments :

• Si X est un ensemble non-vide, $(E, \|\cdot\|)$ un ev réel normé et $B(X, E)$ l'espace vectoriel des fonctions bornées définies sur X , à valeurs dans E , alors $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet si $(E, \|\cdot\|)$ est complet.

Preuve : Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy de $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists P \in \mathbb{N}$, $\forall (p, q) \in \mathbb{N}$ $p \geq P, q \geq P$, alors

$$\|f_p - f_q\|_\infty \leq \varepsilon$$

On fixe donc $p, q \in \mathbb{N}^2$, $p \geq P, q \geq P$,

$$\forall x \in X, \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$$

Donc $\forall x \in X$ $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est de Cauchy. Donc elle converge dans E : $\forall x \in X, \exists f(x) \in E, f_n(x) \rightarrow f(x)$.

On définit $f: x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} (f_n(x)) = f(x)$.

Mq $f \in B(X, E)$: comme (f_n) est de Cauchy pour $\|\cdot\|_\infty$, elle est bornée. Donc $\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty \leq M$.

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X, \|f_n(x)\| \leq M.$$

Par continuité de $\|\cdot\|$ et par passage à la limite,

$$\forall x \in X, \|f(x)\| \leq M.$$

$$\text{Mq } \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{Mq } \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon)$$

Soit $\varepsilon > 0$, soient $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, $p \geq P$, $q \geq P$,

$$\forall x \in X \quad \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$$

donc par continuité de $\|\cdot\|$, en faisant $q \rightarrow +\infty$,

$$\forall x \in X \quad \|f_p(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$$

Donc par passage au sup,

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq P, \quad \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$$

$$\text{Donc } \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Donc $(B(X, E), \|\cdot\|_\infty)$ est complet.

- Si (K, d) est un espace métrique compact et $(F, \|\cdot\|)$

un espace de Banach, alors l'espace vectoriel des

fonctions continues sur K à valeurs dans F muni

de $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy de $\mathcal{C}(K, F)$.

Comme $\mathcal{C}(K, F) \subset B(K, F)$ alors $\exists f \in B(K, F)$ telle

$$\text{que } \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, $(f_n)_{n \geq 0}$ converge uniformément vers f .

Donc f est continue, donc $f \in \mathcal{C}(K, F)$.

Donc $(\mathcal{C}(K, F), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.