Théorème de Bernstein-Valiron

Référence : [Bernis p57]

Théorème : Soit f une application d'un intervalle ouvert I à valeurs réelles, indéfiniment dérivable. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(2n)}$ est positive. Alors f est analytique sur I.

Étapes :

① Poser $g : t \mapsto f(x_0 - t) + f(x_0 + t)$ et écrire sa formule de Taylor avec reste intégral.

② Mq $R_N(t) \longrightarrow 0$

③ Écrire le dvt de Taylor de f et mq $r_{2N+1}(x) \longrightarrow 0$

④ Mq $S_{2N} \longrightarrow f(x)$

Application : tan est D.S.E sur $]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$, $\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x))$

où $P_0 = X$ et $P_{n+1} = (1+X^2) P_n'$

On montre alors par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, P_n est à coef positifs strictement et de parité opposé à celle de n.

Donc $(\tan|_{]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[})'$ est de dérivées paires ≥ 0 donc D.S.E donc par primitivation $\tan|_{]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}$ aussi.

Théorème de Bernstein-Valiron [Bernis 57].

Théorème: Soit f une application d'un intervalle ouvert I à valeurs réelles, indéfiniment dérivable. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(2n)}$ est positive. Alors f est analytique sur I.

Démo: comme f est $\mathcal{C}^\infty$ sur I, si elle est D.S.E alors on aura $\forall x_0 \in I$, $\exists \varepsilon > 0$, $\forall x \in]x_0 - \varepsilon ; x_0 + \varepsilon[$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (x - x_0)^i$$

Attention, si la série de Mc Laurin converge, cela n'entraîne pas l'analycité de la f°. Ex

$$\phi : x \longmapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

ϕ est $\mathcal{C}^\infty$ et toutes les dérivées de ϕ s'annulent en 0. Donc la série de Mc Laurin de ϕ en 0 converge vers 0.

Or ϕ est non-nulle donc elle ne converge simplement vers ϕ sur aucun vois. de 0.

L'astuce: on connaît des choses sur les dérivées paires. Donc on va se ramener à l'étude d'une fonction paire.

Soit $x_0 \in I$, comme I est ouvert, $\exists \varepsilon_0 > 0$, $]x_0 - \varepsilon_0 ; x_0 + \varepsilon_0[\subset I$.

on définit alors

$$g_0 : \left]-\varepsilon_0 ; \varepsilon_0\right[\to \mathbb{R}$$
$$h \mapsto f(x_0-h) + f(x_0+h)$$

g_0 est paire et $\mathcal{C}^\infty$ sur $I_0 = \left]-\varepsilon_0 ; \varepsilon_0\right[$

Soit $h \in I_0$, soit $k \in \mathbb{N}$, comme g est $\mathcal{C}^{2k+2}$ sur $[0;h]$,

$$g(h) = \sum_{i=0}^{k} \frac{g^{(2i)}(0)}{(2i)!} h^{2i} + \underbrace{\int_0^h \frac{g^{(2k+2)}(t)}{(2k+1)!} (h-t)^{2k+1} dt}_{= R_k(h)}$$

$g^{(2k+2)} \geq 0$ sur I_0 car $f^{(2k+2)} \geq 0$ sur I.

Donc $R_k(h) \geq 0$

On a aussi $R_k(h) \leq g(h)$ car $\sum_{i=0}^{k} \frac{g^{(2i)}(0)}{(2i)!} h^{2i} \geq 0$.

Mais $0 \leq R_k(h) \leq g(h)$ ne nous suffit pas à conclure, il va nous falloir une majoration du type $0 \leq R_k(h) \leq M\alpha^n$ avec $0 < \alpha < 1$.

On d alors h et h' dans I_0 tq $0 < h < h' < \varepsilon_0$. Et on compare les restes. Après changement de variable on a :

$$R_k(h) = h^{2k+2} \int_0^1 \frac{g^{(2k+2)}(sh)}{(2k+1)!} (1-s)^{2k+1} ds$$

$$R_k(h') = (h')^{2k+2} \int_0^1 \frac{g^{(2k+2)}(sh')}{(2k+1)!} (1-s)^{2k+1} ds$$

or, comme $g^{(2k+4)} \geq 0$, $g^{(2k+3)} \nearrow$ et comme $g^{(2k+3)}(0) = 0$

on en déduit que $g^{(2k+3)} \geq 0$ sur $[0;\varepsilon_0[$ donc

$g^{(2k+2)}$ croissante sur $[0;\varepsilon_0[$ donc $\forall s \in [0;1]$

$$g^{(2k+2)}(sh_1) \leq g^{(2k+2)}(sh_2)$$

et $$R_k(h) \leq h^{2k+1} \underbrace{\int_0^1 \frac{g^{(2k+2)}(sh_2)}{(2k+1)!}(1-s)^{2k+1}\,dt}_{= \frac{1}{(h')^{2k+1}} R_k(h')}$$

Donc $0 \leq R_k(h) \leq \left(\frac{h}{h'}\right)^{2k+1} R_k(h') \leq \left(\frac{h}{h'}\right)^{2k+1} g(h') \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Donc $R_k(h) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0 \quad \forall h \in [0;\varepsilon_0[$

Comme $R_k(-h) = R_k(h)$, on en conclut que

$\sum_i \frac{g^{(2i)}(0)}{(2i)!} h^{2i}$ converge vers $g(h)$ sur $]-\varepsilon_0;\varepsilon_0[$

Donc en particulier, son terme $\frac{g^{(2i)}(0)}{(2i)!} h^{2i} \xrightarrow[i\to+\infty]{} 0 \quad (*)$

On en revient à f :

Soit $k \in \mathbb{N}$, soit $x \in]x_0-\varepsilon_0; x_0+\varepsilon_0[$, f est $\mathcal{C}^{2k+2}$ sur $[x_0;x]$

$$f(x) = \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(2k+2)}(t)}{(2k+1)!}(x-t)^{2k+1}\,dt$$

$$= \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \int_0^1 \frac{f^{(2k+2)}(x_0+(x-x_0)s)}{(2k+1)!}(x-x_0-(x-x_0)s)^{2k+1}(x-x_0)\,ds$$

$$= \sum_{i=0}^{2k+1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \underbrace{(x-x_0)^{2k+2}\int_0^1 \frac{f^{(2k+2)}(x_0+(x-x_0)s)}{(2k+1)!}(1-s)^{2k+1}\,ds}_{r_k(x)}$$

Or comme $f^{(2k+2)} \geq 0$ par hypothèse,

$$g^{(2k+2)}((x-x_0)s) \geq f^{(2k+2)}(x_0+(x-x_0)s)$$

Donc $0 \leq r_n(x) \leq \underbrace{(x-x_0)^{2k+1}\int_0^1 \frac{g^{(2k+2)}((x-x_0)s)}{(2k+1)!}(1-s)^{2k+1}\,ds}_{= R_k(x-x_0) \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0}$

Donc $\Big(\overbrace{\sum_{i=0}^{2k+1} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i}^{S_{2k+1}}\Big)_k$ converge vers $f(x)$

Mq $\underbrace{\sum_{i=0}^{2k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i}_{S_{2k}} \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(x)$

$$S_{2k+2}-S_{2k+1} = \frac{f^{(2k+2)}(x_0)}{(2k+2)!}(x-x_0)^{2k+2}$$

or $g^{(2k+2)}(0) = 2f^{(2k+2)}(x_0)$

Donc $f^{(2k+2)}(x_0) \leq g^{(2k+2)}(0)$

Donc $S_{2k+2}-S_{2k+1} \leq \frac{g^{(2k+1)}(0)(x-x_0)^{2k+2}}{(2k+2)!} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Donc $(S_{2k+2})_k$ cv vers $\lim\limits_{k\to+\infty} S_{2k+1} = f(x)$

Donc $\sum_k \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ cv vers $f(x)$ sur $]x_0-\varepsilon_0 ; x_0+\varepsilon_0[$