

Borel - Lebesgue $\Rightarrow$ Bolzano-Weierstrass:

On suppose que (E, d) est un espace métrique compact selon la définition de Borel-Lebesgue.

Me la propriété de B.W. est également vérifiée.

Option 1: Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ on pose $A_m = \{x_n \mid n \geq m\}$.

$\forall m \in \mathbb{N}$, A_m est non-vide et fermé.

Lemme 1: dans un espace compact E , de toute famille de fermés d'intersection vide on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide.

Prouve: Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E .

On suppose $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$.

Par passage au complémentaire, $\bigcup_{i \in I} \underbrace{C_E(F_i)}_{\text{ouvert de } E} = E$.

Comme E est compact, $\exists J \subset I$ fini

tel que $\bigcup_{i \in J} C_E(F_i) = E$. En repassant au complémentaire

on a alors $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$. $\square$

Lemme 2: dans un espace compact, si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille décroissante de fermés de E d'intersection vide alors $\exists i_0 \in I$ tel que $F_{i_0} = \emptyset$.

Preuve: $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ donc comme E est compact, il existe $J \subset I$, fini, tel que $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$.

Par décroissance de $(F_i)_{i \in I}$, $\exists i_0 \in J$ tq $\forall i \in J, F_{i_0} \subset F_i$ donc $\bigcap_{i \in J} F_i = F_{i_0} = \emptyset$ $\square$

Corollaire lemme 2: l'intersection d'une famille de fermés non-vides de E est non-vide.

Ainsi $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{A_m} \neq \emptyset$

Soit $x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \overline{A_m}$, mg x est valeur d'adhérence de (x_n)

On va construire une sous-suite qui converge vers x :

- $\varphi(0) = 0$ ($x_{\varphi(0)} = x_0$)

- Soit $N \in \mathbb{N}$, l'élément $x_{\varphi(N)}$ étant construit, on construit

$x_{\varphi(N+1)}$: $x \in \overline{A_{\varphi(N)+1}}$ donc $B(x, \frac{1}{2^{N+1}}) \cap A_{\varphi(N)+1} \neq \emptyset$.

Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(x, \frac{1}{2^{N+1}})$ et

$n \geq \varphi(N)+1$ car $x_n \in A_{\varphi(N)+1} = \{x_n \mid n \geq \varphi(N)+1\}$.

Ainsi, on a construit $(x_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ tel que pour tout

$n \in \mathbb{N}$ $d(x, x_{\varphi(n)}) \leq \frac{1}{2^n}$ d'où $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ $\square$

Option 2: plus directe: $\rightarrow$ voir page 6 pour démo par contraposée

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

- Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend un nombre fini de valeurs, alors on peut prendre une sous-suite constante donc conver-

gente

• Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ prend un nombre infini de valeurs.

Mq on peut trouver une valeur d'adhérence pour la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par l'absurde. On note $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

On suppose que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'a pas de valeur d'adhérence.

Ainsi $\forall x \in E, \exists \varepsilon_x > 0, B(x, \varepsilon_x) \cap A$ est fini.

On prend un recouvrement de E : $\bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon_x) = E$

Comme E est compact on peut en extraire un

nombre fini. Ainsi, $\exists J \subseteq \mathbb{N}$ fini tq $E = \bigcup_{x \in J} B(x, \varepsilon_x)$.

$$\begin{aligned} \text{Donc } \underbrace{A \cap E}_{= A} &= A \cap \left(\bigcup_{x \in J} B(x, \varepsilon_x) \right) \\ &= \bigcup_{x \in J} (A \cap B(x, \varepsilon_x)). \end{aligned}$$

Donc A est une union finie d'ensembles finis

donc A est fini. Contradiction. $\square$

B.W. $\Rightarrow$ B.L

On suppose que de toute suite de E on peut extraire une sous-suite convergente.

Montrons que de tout recouvrement d'ouverts de E on peut extraire un recouvrement fini.

Lemme 1: si (E, d) est compact alors pour tout

recouvrement d'ouverts de E $(O_i)_{i \in I}$, il existe $d > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \exists i \in I, B(x; \alpha) \subset O_i$$

Preuve: supposons que pour $(O_i)_{i \in I}$ $\forall \alpha > 0 \exists x \in E \forall i \in I$
 $B(x; \alpha) \not\subset O_i$ dans E compact.

on construit une suite $(x_n)_n$ avec ces $x \in E$ "isolés":

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \exists x_n \in E \forall i \in I \quad B(x_n; \frac{1}{n}) \not\subset O_i$$

On peut en extraire une sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ qui converge. On note

$x \in E$ sa limite. $(O_i)_{i \in I}$ recouvre E , donc:

$\exists i_0 \in I$ tel que $x \in O_{i_0}$. O_{i_0} étant ouvert, $\exists \beta > 0$ tel que
 $B(x; \beta) \subset O_{i_0}$.

Comme $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_1 \Rightarrow$

$$d(x_{\varphi(n)}; x) \leq \frac{\beta}{2}$$

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{\varphi(N_2)} \leq \frac{\beta}{2}$

Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq \max(N_1, N_2)$. Alors $d(x_{\varphi(n)}; x) \leq \frac{\beta}{2}$

et $\forall y \in B(x_{\varphi(n)}; \frac{1}{\varphi(n)})$, $d(x_{\varphi(n)}; y) \leq \frac{\beta}{2}$

d'où $y \in B(x; \beta)$ et donc $B(x_{\varphi(n)}; \frac{1}{\varphi(n)}) \subset O_{i_0}$.

Contradiction. $\square$

Lemme 2: si (E, d) vérifie la propriété de B-W, alors E
 est pré-compact, i.e. $\forall \alpha > 0$, il existe un recouvrement
 fini de E de boules de rayon α .

Preuve: Soit $\alpha > 0$, $(B(x; \alpha))_{x \in E}$ est un recouvrement d'ouverts de E . Supposons qu'il n'existe pas de recouvrement fini. Ainsi, pour tout $J \subset E$ fini, $\bigcup_{x \in J} B(x; \alpha) \neq E$. On va construire une suite qui sans valeur d'adhérence:

▷ Soit $x_0 \in E$.

▷ Comme $B(x_0; \alpha) \neq E$, $\exists x_1 \in E \setminus B(x_0; \alpha)$. On a alors $d(x_1; x_0) \geq \alpha$.

▷ De même, $B(x_0; \alpha) \cup B(x_1; \alpha) \neq E$ donc

$\exists x_2 \in E \setminus B(x_0; \alpha) \cup B(x_1; \alpha)$ et on a $d(x_0; x_1) \geq \alpha$, $d(x_0; x_2) \geq \alpha$ et $d(x_1; x_2) \geq \alpha$.

▷ On construit ainsi une suite telle que $\forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j$
 $d(x_i; x_j) \geq \alpha$.

Ainsi, soit $(x_{\varphi(n)})_n$ une sous-suite de $(x_n)_n$. $(x_{\varphi(n)})_n$ n'est pas de Cauchy car $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N} \quad d(x_{\varphi(n)}, x_{\varphi(m)}) \geq \alpha$.

Donc aucune sous-suite de $(x_n)_n$ ne converge. Contradiction.

Conclusion:

Soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ un recouvrement d'ouverts de E . $\exists \alpha > 0 \quad \forall x \in E$
 $\exists i \in I \quad B(x; \alpha) \subset \mathcal{O}_i$ d'après le lemme 1.

On recouvre E de boules de rayon α . On note $(B_i)_{i \in \{1, \dots, N\}}$ ce recouvrement. (comme autorisé par le lemme 2).

Alors $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, on note x_i le centre de B_i . Alors

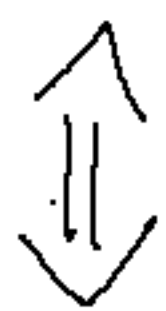
d'après le lemme 1, $\exists k_i \in I$ tq $B(x_i, \alpha) = B_i \subset O_{k_i}$

Donc $\underbrace{\bigcup_{i=1}^N B_i}_{=E} \subset \bigcup_{i=1}^N O_{k_i}$

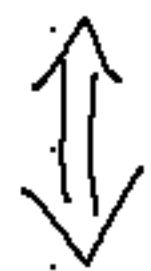
Donc $E = \bigcup_{i=1}^N O_{k_i}$

on peut donc extraire un recouvrement fini d'ouverts de E □

Note : B.L. compact



pré-compact + complet



séquentiellement compact

Mq $BL \Rightarrow BW$ par contraposée :

Mq si toute suite de E n'a pas de valeurs d'adhérence comment ?
Paire pour quel n'ai pas de VA
alors on peut construire un recouvrement d'ouverts infini dont on ne peut pas extraire de recouvrement fini.

Soit $x_0 \in E \neq \emptyset$
th $x_n = x_0$

Soit $(x_n)_n$ une suite de E qui n'a pas de valeur d'adhérence.

Donc $\forall x \in E \exists \varepsilon_x > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n \geq N \Rightarrow d(x, x_n) \geq \varepsilon_x)$ ✓

Autrement dit, $\forall x \in E, \exists \varepsilon_x > 0, \exists N \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} x_n \notin B(x, \varepsilon_x)$. (*)

Lemme une suite qui n'a pas de vda prend un nb infini de valeurs.

Preuve par contraposée:

Si $(u_n)_n \in E^{\mathbb{N}}$ prend un nb fini de valeurs, alors il existe $u \in E$ tel que $\{n \in \mathbb{N} \mid u_n = u\}$ est infini, et u est donc une vda de (u_n) .

Par contraposée, on en conclut le lemme.

Ainsi, $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est infini et (*) nous dit que $\forall x \in E, \exists \varepsilon_x > 0 \quad B(x, \varepsilon_x) \cap A$ est fini.

Soit $(B(x, \varepsilon_x))_{x \in E} = \mathcal{P}$.

Cette famille d'ouverts est un recouvrement de E .

Mq toute sous-famille finie de $\mathcal{P}$ ne recouvre pas E .

$(\forall J \subset E, J \text{ fini, Mq } E \not\subset \bigcup_{x \in J} B(x, \varepsilon_x))$ ✓ x2

Soit $J \subset E$, fini,

$$A \cap \left(\bigcup_{x \in J} B(x; \varepsilon_x) \right) = \bigcup_{x \in J} \underbrace{(A \cap B(x; \varepsilon_x))}_{\text{fini}}$$

Une union finie d'ensembles finis est finie. Donc

$$\exists y \in A \setminus \bigcup_{x \in J} B(x; \varepsilon_x) \text{ et } y \in E \left\{ \bigcup_{x \in J} \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ fini donc} \right.$$

ne recouvre pas A
qui est infinie.

$$\text{Ainsi } E \not\subset \bigcup_{x \in J} B(x; \varepsilon_x).$$

Finalement, $(B(x; \varepsilon_x))_{x \in E}$ est un recouvrement de E dont on ne peut pas extraire de sous-recouvrement fini de E .

On a donc prouvé $\vdash BW \Rightarrow \vdash BL$, d'où $BL \Rightarrow BW$.

DVT - BW $\Leftrightarrow$ BL: E espace métrique. [Gourdon P.28]

BL $\Rightarrow$ Thm BW Δ Option 1: par contraposée

- $\exists (x_n) \not\rightarrow \text{vda} \Rightarrow A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ infini
- $\Rightarrow \forall x \in E \exists \varepsilon_x > 0 \quad B(x; \varepsilon_x) \cap A$ fini
- $\Rightarrow$ Pas de sous recouvrement fini

Δ Option 2: directement supp. E compact (BL)

- Soit (x_n) : $A_N = \{x_n; n \geq N\}$, $A_{N+1} \subset A_N$: $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{A_N}$?

Lemme 1: dans E compact, de toute famille de fermés d'intersection vide on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide. Preuve directe en passant au complémentaire

Lemme 2: Une famille de fermés emboîtés non-vides est non-vide. Preuve par contraposée: si l'intersection est vide alors un des fermés est vide.

Donc $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{A_N}$ est non vide $\rightarrow x \in \bigcap_{N \in \mathbb{N}} \overline{A_N}$ est une valeur d'adhérence.

Thm BW $\Rightarrow$ BL / Lemme 1: Soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E . Alors $\exists \alpha > 0 \forall x \in E \exists i_0 \in I \quad B(x; \alpha) \subset \mathcal{O}_{i_0}$.

Preuve par l'absurde: Construite une suite (x_n) tq $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in I \quad B(x_n; \frac{1}{n}) \not\subset \mathcal{O}_i$. Prendre une sous-suite de limite $x \in E \exists i \in I$ tq $x \in \mathcal{O}_i \exists \varepsilon > 0 \quad B(x; \varepsilon) \subset \mathcal{O}_i$ car ouvert.

Faire rentrer la suite $(x_{p(n)})$ dans cet ouvert.

Lemme 2: "propriété des réverbères" $\forall \alpha > 0$, on peut recouvrir E d'un nombre fini de boules de rayon α .

Preuve par contraposée: $\exists \alpha > 0$ tq avec un nombre fini de boules de rayon α on ne recouvre pas E .

Construire une suite qui n'a pas de valeur d'adhérence.

Soit $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ un recouvrement de E . Alors on a le α du Lemme 1.

On fait un recouvrement fini de boules de rayon α . Chacune de

ces boules est dans un ouvert. Alors $\bigcup_{x \in E} B(x; \alpha) \subset \bigcup_{i \in K} \mathcal{O}_i$ $\square$