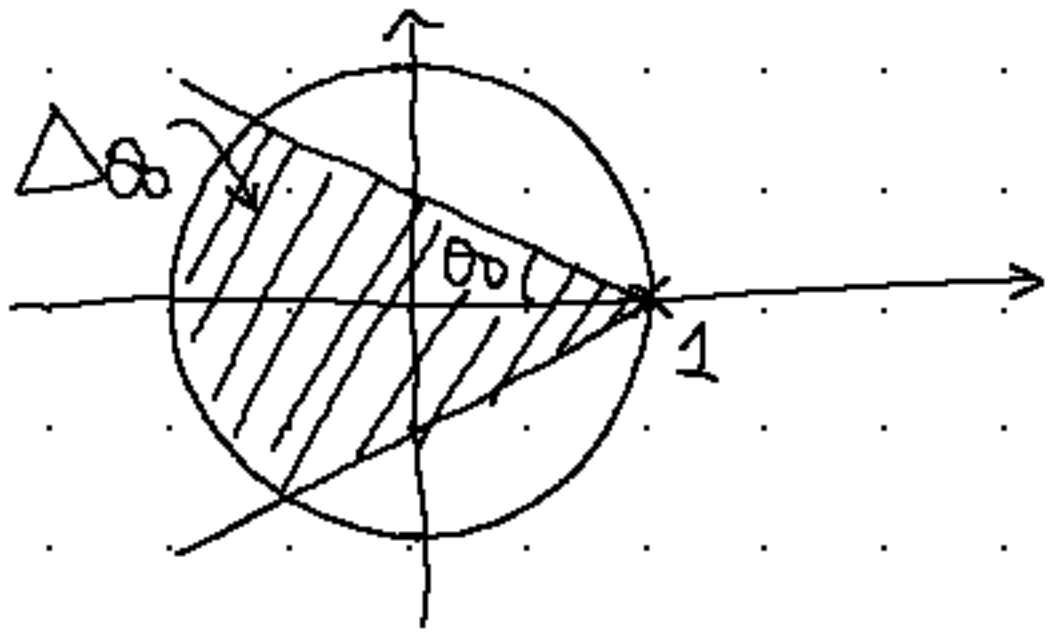


Théorème d'Abel angulaire et taubérien faible:

Référence: [Goursat Analyse 3 p263]

Énoncé: Théorème d'Abel: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$, telle que $\sum a_n$ converge. On note f la somme de cette série entière sur le disque unité. On fixe $\theta_0 \in [0; \frac{\pi}{2}[$ et on pose:

$$\Delta_{\theta_0} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1 \text{ et } \exists \rho > 0, \exists \theta \in [-\theta_0; \theta_0], z = 1 - \rho e^{i\theta}\}$$



On a alors $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

Théorème Taubérien faible: Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1 et f la somme de cette série entière sur le disque unité. On suppose que

$$\exists S \in \mathbb{C} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = S$$

Si $a_n = o(\frac{1}{n})$ alors $\sum_n a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

Étapes: (E1) Thm 1: Majorer $|f(z) - S|$ en se servant d'une simili-transformation d'Abel

(E2) Commentaires sur le thm radial d'Abel + "appli"

(E3) Thm 2

Ex 1) Théorème d'Abel

$$\forall z \in \mathcal{D}(0;1), f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ et } S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$$

on veut mg $\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{00}}} (f(z)) = S$

$$\text{on va donc étudier } |f(z) - S| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right|$$

Soit $N \in \mathbb{N}$, soit $z \in \mathcal{D}(0;1)$, on a ainsi $|z| < 1$

$$\sum_{n=0}^N a_n z^n - \sum_{n=0}^N a_n = \sum_{n=0}^N a_n (z^n - 1)$$

$$\text{On pose } \forall n \in \mathbb{N} \quad S_n = \sum_{k=0}^n a_k \quad R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$$

$$\text{Ainsi, } \forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = R_{n-1} - R_n$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } \sum_{n=0}^N a_n z^n - S_N &= \sum_{n=1}^N (R_{n-1} - R_n) (z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - 1) - \sum_{n=1}^N R_n (z^n - 1) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} R_n (z^{n+1} - z^n) - R_N (z^N - 1) \\ &= (z-1) \sum_{n=0}^{N-1} R_n z^n - \underbrace{R_N (z^N - 1)}_{\xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0} \end{aligned}$$

Donc finalement, par passage à la limite,

$$f(z) - S = (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \quad \forall z \in \mathcal{D}(0;1)$$

Comme $R_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \Rightarrow |R_n| < \varepsilon)$

Soit donc $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ le rang correspondant, $z \in \mathcal{D}(0; 1)$

$$|f(z) - S| = \left| (z-1) \sum_{n=0}^{+\infty} R_n z^n \right|$$

$$|f(z) - S| \leq |z-1| \left(\underbrace{\sum_{n=0}^N |R_n| |z|^n}_{< 1} \right) + |z-1| \left(\underbrace{\sum_{n=N+1}^{+\infty} |R_n| |z|^n}_{\leq \varepsilon} \right)$$

$$\leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^N |R_n| \right) + |z-1| \underbrace{\frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |z|^n}_{\leq \varepsilon}$$

$$= \frac{1}{1-|z|} - \frac{1-|z|^{N+1}}{1-|z|}$$

$$= \frac{|z|^{N+1}}{1-|z|} \leq \frac{1}{1-|z|}$$

Donc $|f(z) - S| \leq |z-1| \left(\sum_{n=0}^N |R_n| \right) + \varepsilon \times \frac{|z-1|}{1-|z|}$

Si $z \in \Delta_{\theta_0}$ alors $\exists \theta \in [-\theta_0; \theta_0]$ et $\rho > 0$ tel que $|z| < 1$ et

$$z = 1 - \rho e^{i\theta}$$

Dans ces conditions, $\frac{|z-1|}{1-|z|} = \frac{\rho(1+|z|)}{1-|z|^2} \leq \frac{2\rho}{1-|z|^2}$

$$\begin{aligned} \text{et } |z|^2 = z\bar{z} &= (1 - \rho e^{i\theta})(1 - \rho e^{-i\theta}) = 1 + \rho^2 - \rho e^{i\theta} - \rho e^{-i\theta} \\ &= 1 + \rho^2 - 2\cos(\theta)\rho \end{aligned}$$

Donc $\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2\rho}{-\rho^2 + 2\rho\cos(\theta)} = \frac{2}{2\cos(\theta) - \rho}$

Et $\forall \theta \in [-\theta_0; \theta_0]$, $\cos(\theta) \geq \cos(\theta_0)$ donc

$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{2\cos(\theta_0) - \rho}$$

si de plus $\rho \leq \cos(\theta_0)$

alors
$$\frac{1}{2\cos(\theta_0) - \rho} \leq \frac{1}{2\cos(\theta_0) - \cos(\theta_0)} \leq \frac{1}{\cos(\theta_0)}$$

Donc finalement si $z \in \Delta_{\theta_0}$, $z = 1 - \rho e^{i\theta}$ où $\rho \leq \cos(\theta_0)$

alors
$$\frac{|z-1|}{1-|z|} \leq \frac{2}{\cos(\theta_0)}$$

donc
$$|f(z) - S| \leq |z-1| \sum_{n=0}^N |R_n| + \frac{2\varepsilon}{\cos(\theta_0)}$$

comme $|z-1| \xrightarrow{z \rightarrow 1} 0$ alors $\exists \alpha > 0 \forall z \in \mathbb{C}$,

$$|z-1| \leq \alpha \Rightarrow |z-1| \sum_{n=0}^N |R_n| \leq \varepsilon$$

Ainsi, si $z \in \Delta_{\theta_0}$ $|z-1| \leq \min(\alpha, \cos(\theta_0))$

alors
$$|f(z) - S| \leq \varepsilon \left(1 + \frac{2}{\cos(\theta_0)} \right)$$

d'où
$$\lim_{\substack{z \rightarrow 1 \\ z \in \Delta_{\theta_0}}} (f(z)) = S$$

□

Thm radial d'Abel

(E2) commentaire : cas des séries de la variable réelle

$$|f(t) - S| \leq |t-1| \left(\sum_{n=0}^N |R_n| \right) + \varepsilon \times \frac{|t-1|}{1-|t|}$$

Donc pour $t \in]0; 1[$,

$$|f(t) - S| \leq |t-1| \left(\sum_{n=0}^N |R_n| \right) + \varepsilon$$

on a alors plus facilement $|f(t) - S| \leq 2\varepsilon$

Application : $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont convergentes

$\sum c_n$ est le produit de Cauchy des deux séries si

$$\sum c_n \text{ converge alors } \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n$$

Comme $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, le rayon de ces séries entières de la var. réelle $\sum a_n t^n$ et $\sum b_n t^n$ est ≥ 1 . Donc $\sum a_n t^n$ a également un rayon de convergence d'au moins 1. Et $\forall t < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right)$.

Donc en notant

$$f: t \in]-1; 1[\rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

$$g: t \in]-1; 1[\rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n$$

$$h: t \in]-1; 1[\rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n$$

d'après le thm d'Abel, $f(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = f(1)$

$$g(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n = g(1)$$

$$h(t) \xrightarrow[t \rightarrow 1]{} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n = h(1)$$

$$\text{et } h(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n t^n\right)$$

Donc par passage à la limite $f(1)g(1) = h(1)$.

(E3) Fausse applications:

$$\text{Valeur de } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n t^{2n}$$

donc

$$\arctan(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{de rayon de}$$

convergence ≥ 1 et telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ converge

car il s'agit d'une série alternée donc par le

thm radial d'Abel, $\lim_{t \rightarrow 1} (\arctan(t)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$

or $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

On peut le montrer autrement:

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ converge sur $[0;1]$ car c'est une série alternée.

$$\text{Soit } N \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], \underbrace{\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \right|}_{= R_N(x)} \leq \frac{|x|^{2N+2}}{2N+2} \leq \frac{1}{2N+2} \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{} 0$$

Donc la suite $(R_N)_{N \geq 0}$ converge uniformément

vers 0 sur $[0;1]$. Donc $\sum_n \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ cvu sur $[0;1]$.

En particulier sa somme est continue en 1 à gch

et $\forall x \in]0;1[\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \arctan(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

$$\text{Donc } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

Même chose dans cet autre exemple:

$\forall x \in [0; 1]$ $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ converge car il s'agit d'une série alternée.

$$\forall x \in [0; 1] \quad |R_N(x)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| \leq \frac{|x|^{N+1}}{N+1} \leq \frac{1}{N+1} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

donc les restes sont majorés uniformément

donc $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

En particulier sa somme est continue en 1.

$$\text{Or } \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n = \ln(1+x) \quad \forall x \in]-1; 1[$$

$$\text{Donc en 1, } \ln(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} \ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

④ **thm taubérien faible**: $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ de rayon de cv = 1.

On suppose que $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) = S$

Si $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$.

$$\text{Notons } S_n = \sum_{k=0}^n a_k$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, soit $x \in]0; 1[$

$$S_N - f(x) = \sum_{k=1}^N a_k (1 - x^k) - \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k x^k$$

$$\text{Donc } |S_N - f(x)| \leq \sum_{k=1}^N |a_k (1-x)(1+x+\dots+x^{k-1})| + \left| \sum_{k=N+1}^{+\infty} a_k x^k \right|$$

$$|S_N - f(x)| \leq \sum_{k=1}^N |a_k| \underbrace{(1-x)(1+x+\dots+x^{k-1})}_{\leq k} + \sum_{k=N+1}^{+\infty} |a_k| x^k$$

Donc

$$|S_N - f(x)| \leq (1-x) \sum_{k=1}^N |a_k| k + \sum_{k=N+1}^{+\infty} |a_k| x^k$$

comme $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

$na_n \rightarrow 0$ donc $(a_n n)_{n \geq 0}$ est majorée donc

$\exists M > 0$ tel que

$$\begin{aligned} |S_N - f(x)| &\leq (1-x)NM + \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{|a_k| x^k k}{N} \\ &\leq (1-x)N \times M + \sup_{k \geq N+1} (|a_k| k) \sum_{k=N+1}^{+\infty} \frac{x^k}{N} \\ &\leq (1-x)NM + \sup_{k \geq N+1} (|a_k| k) \frac{1}{1-x} \frac{1}{N} \end{aligned}$$

Soit $0 < \varepsilon < 1$, si $x = 1 - \frac{\varepsilon}{N}$ alors $x \in]0; 1[$ et

$$|S_N - f(1 - \frac{\varepsilon}{N})| \leq \varepsilon M + \sup_{k \geq N+1} (|a_k| k) \frac{1}{\varepsilon}$$

comme $a_k k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_1, |a_n| n \leq \varepsilon^2$

Ainsi, si $N \geq N_1$,

$$|S_N - f(1 - \frac{\varepsilon}{N})| \leq \varepsilon M + \varepsilon$$

$$\text{et } f(1 - \frac{\varepsilon}{N}) \xrightarrow[N \rightarrow +\infty]{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \lim_{x \rightarrow 1} (f(x)) = S$$

donc $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ $\forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N_2 \Rightarrow |f(1 - \frac{\varepsilon}{N}) - S| \leq \varepsilon)$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $N \geq \max(N_1, N_2)$, on a

$$|S - S_N| \leq |S - f(1 - \frac{\varepsilon}{N})| + |f(1 - \frac{\varepsilon}{N}) - S_N|$$

$$\leq \varepsilon + \varepsilon(M+1) = \varepsilon(M+2)$$

Donc $S_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} S$ et donc $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$

□