

SURJECTIVITÉ EXP DE MATRICE 155 - 204

214

Commentaires: référence principale sur agreg-maths Zaidouigue, "Un max de maths" mais quelques infos sont dispersées dans le Rouvère

Énoncé "Un max de maths": Problème 9. Image de l'exponentielle. Partie II. P49

Déf. et notations: Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, $\exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$. ↙ converge normalement
 $\exp$ est $\mathcal{C}^\infty$

Partie II - Une approche topologique

- 1) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Mg $\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$
- 2) Dans la suite, $C \in M_n(\mathbb{C})$. $\mathbb{C}$ est le groupe des inversibles de $\mathbb{C}[C]$. Mg $\mathbb{C} = \mathbb{C}[C] \cap GL_n(\mathbb{C})$.
Mg l'exponentielle réalise un morphisme du groupe additif $\mathbb{C}[C]$ dans le groupe multiplicatif $\mathbb{C}$
- 3) Mg $\mathbb{C}$ est un ouvert connexe de $\mathbb{C}[C]$
- 4) Établir que $\exp(\mathbb{C}[C])$ contient un voisinage de I_n dans $\mathbb{C}$. En déduire que $\exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert dans $\mathbb{C}$.
- 5) Conclure que $\exp(\mathbb{C}[C]) = \mathbb{C}$.
- 6) Retrouver que $\exp(M_n(\mathbb{C})) = GL_n(\mathbb{C})$ et $\exp(M_n(\mathbb{R})) = \{A^2; A \in GL_n(\mathbb{R})\}$.

Rouvière p 209:

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -2\pi & 0 \\ 2\pi & 0 & 0_{2,n-2} \\ 0_{m-2,2} & 0_{m-2} & \end{pmatrix} = I = \exp(0)$$

↳ $\exp$ n'est pas injective.

RÉDACTION DU DVT $n \in \mathbb{N}^*$

Étape 1: $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exp(A) \in \mathbb{C}[A]$

$$\text{Soit } A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \exp(A) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} = \lim_{K \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^K \frac{A^k}{k!}$$

$$\text{et } \forall K \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^K \frac{A^k}{k!} \in \mathbb{C}[A]$$

Donc $\exp(A)$ est la limite d'une suite de $\mathbb{C}[A]$

Or $\mathbb{C}[A] \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un sev de dimension finie. Donc il est complet. Donc en particulier il est fermé. Donc

$$\exp(A) \in \mathbb{C}[A]$$

Étape 2: Soit $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note $\mathcal{C} = \mathbb{C}[C]^\times$

Montrons que $\mathcal{C} = \mathbb{C}[C] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C})$

$$\boxed{\subseteq} \text{ Ok}$$

$\boxed{\supseteq}$ Soit $M \in \mathbb{C}[C] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C})$, on note π_M le polynôme minimal de M .

$$\text{On sait que } \pi_M(M) = 0.$$

On sait également que le coef. constant de π_M est non-nul. Si on note $r \in \mathbb{N}^*$ le degré de π_M

$$\text{Donc } \pi_M(M) = a_r M^r + \dots + a_1 M + a_0 = 0$$

$$\text{Donc } a_r M^{r-1} + \dots + a_1 + a_0 M^{-1} = 0$$

$$\text{Donc } M^{-1} = -\frac{1}{a_0} (a_r M^{r-1} + \dots + a_1) \in \mathbb{C}[C]$$

Conclusion: $\mathbb{C} = \mathbb{C}[C] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C})$

- Étape 3: $\text{Mq exp réalise un morphisme de } (\mathbb{C}[C], +) \text{ dans } (\mathbb{C}, \times)$

$\forall A \in \mathbb{C}[C], \exp(A) \in \mathbb{C}[A] \subset \mathbb{C}[C] \text{ (q}^{\circ} 1) \text{ et } \exp(A) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})_{(+)}$

donc $\exp: \mathbb{C}[C] \rightarrow \mathbb{C}[C] \cap \text{GL}_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$

$(\mathbb{C}[C], +, \times, \cdot)$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$(\mathbb{C}[C], +, \cdot)$ est un e.v et $(\mathbb{C}[C], +, \times)$ un anneau.

$(\mathbb{C}, \times)$ est un groupe: celui des inversibles de $\mathbb{C}[C]$

Soient $A, B \in \mathbb{C}[C]$, A et B sont deux polynômes en C .

donc elles commutent donc $\exp(A+B) = \underbrace{\exp(A)}_{\in \mathbb{C}} \underbrace{\exp(B)}_{\in \mathbb{C}} \in \mathbb{C}$ (+)

Donc $\exp: (\mathbb{C}[C], +) \mapsto (\mathbb{C}, \times)$ est un morphisme de groupes.

- Étape 4: $\text{Mq } \mathbb{C} \text{ est un ouvert connexe de } \mathbb{C}[C]$

$\text{Mq } \mathbb{C} \text{ est ouvert}$: $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ car c'est

la pré-image de $\mathbb{C}^*$ par $\det$ qui est une application

continue. $\mathbb{C}[C]^{\times} = \text{GL}_n(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C}[C]$ ouvert dans $\mathbb{C}[C]$ (+)

$\text{Mq } \mathbb{C} \text{ est connexe}$: pour $\text{Mq } \mathbb{C}$ est connexe on va

$\text{Mq } \mathbb{C}$ est connexe par arc.

Soit $A, B \in \mathbb{C}$,

mq il existe une fonction $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ continue
telle que $f(0) = A$, $f(1) = B$.

$\forall z \in \mathbb{C}$, $zA + (1-z)B \in \mathbb{C}[x]$ (car c'est un ev)

Si on pose $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}[x]$ alors φ est
 $z \mapsto zA + (1-z)B$.

continue (c'est un polynôme en z) et $\varphi(0) = B$,
 $\varphi(1) = A$.

Si on prend pour z une fonction continue g :
 $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$
 $t \mapsto g(t)$

alors $\varphi \circ g: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}[x]$ est continue et

$(\varphi \circ g)(0) = B$, $(\varphi \circ g)(1) = A$.

on veut $\varphi \circ g$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, i.e. $\forall t \in [0,1]$,

$(\varphi \circ g)(t) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ i.e. $\forall t \in [0,1]$, $(\det \circ \varphi \circ g)(t) \neq 0$.

on a déjà $(\det \circ \varphi \circ g)(0) \neq 0$ car $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$.

Et on sait que $\det(\varphi \circ g)$ est un polynôme en g ,
en particulier donc non-nul. on peut alors

choisir g tq $\det(\varphi \circ g)$ ne s'annule pas sur $[0,1]$. ⁽⁺⁾

Ainsi $f = \varphi \circ g: [0,1] \rightarrow \mathbb{C}$ est continue et $f(0) = B$,

$f(1) = A$. Donc $\mathbb{C}$ est connexe par arc donc connexe. ⁽⁺⁾

• Étape 5: $\text{Mg exp}(\mathbb{C}[C])$ contient un voisinage de $\mathbb{I}d_m$ dans $\mathbb{C}$

La différentielle de $\exp$ en $0_{\text{M}(\mathbb{C})}$ est $\mathbb{I}d_{(+)}$

On vérifie les hypothèses du thm d'inversion locale.

On se place dans $\mathbb{C}[C]$?

$\mathbb{C}[C]$ est un ouvert de $\mathbb{C}[C]$,

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, a un point de U et $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que la matrice $Df(a)$ est inversible, i.e. $\det(Df(a)) \neq 0$.

Il existe alors un ouvert V contenant a (et contenu dans U) et un ouvert W contenant $f(a)$, tels que $f|_V$ soit un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de V sur $W = f(V)$.

qui est un $\mathbb{R}^d$ car $\text{seu de } \text{M}(\mathbb{R})$.

$\exp: \mathbb{C}[C] \rightarrow \mathbb{C}$ est $\mathcal{C}^1_{(+)}$

TIL

$0 \in \mathbb{C}[C]$ et $D\exp(0) = \mathbb{I}d_{(+)}$ $\in \text{GL}_m(\mathbb{C})$ donc par le TIL

il existe $V \subset \mathbb{C}[C]$ un ouvert tq $0 \in V$ et il existe

$W \subset \exp(\mathbb{C}[C])$ un ouvert tq $\exp(0) = \mathbb{I}d \in W$ tels que $\exp|_V$ soit un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de V sur $W = \exp(V)$.

Donc il existe W un voisinage de $\mathbb{I}d$ dans $\mathbb{C}$.

• Étape 6: $\text{Mg exp}(\mathbb{C}[C])$ est ouvert dans $\mathbb{C}$

Soit $A \in \exp(\mathbb{C}[C])$, $\exists B \in \mathbb{C}[C]$ tq $\exp(B) = A$

Comme $\exp$ est un morphisme de groupes,

$\exp(B+V) = \exp(B)W = AW$

On a alors $AW \subset \exp(\mathbb{C})$ et $ACAW$.

Mq AW est ouvert.

$f: \begin{matrix} V \mapsto AW \\ M \mapsto \exp(B) \exp(M) \end{matrix}$ est un $\mathbb{C}^1$ -difféomorphisme

car $\exp(B) \in GL_n(\mathbb{C})$ et $\exp|_V$ est un $\mathbb{C}^1$ -difféo

Donc $f^{-1}(AW) = V$, V est ouvert et f^{-1} est continue

Donc AW est ouvert. Donc $\exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert dans $\mathbb{C}$.

• Étape 7: Mq $\exp(\mathbb{C}[C]) = \mathbb{C}$ est non-vide et
comme $\mathbb{C}$ est connexe et $\exp(\mathbb{C}[C])$ ouvert, il nous
reste à mq $\exp(\mathbb{C}[C])$ est fermé.

On regarde son complémentaire:

$$\text{Mq } \mathbb{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[C]) = \bigcup_{A \in \mathbb{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[C])} A \exp(\mathbb{C}[C]).$$

⊆ Soit $M \in \mathbb{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[C])$, $\mathbb{C}[C]$
comme $I_n \in \exp(\mathbb{C}[C])$ car $\exp(0) = I_n$,

$$M \in M \exp(\mathbb{C}[C])$$

Donc $M \in \bigcup_{A \in \mathbb{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[C])} A \exp(\mathbb{C}[C])$

⊇ Soit $M \in \bigcup_{A \in \mathbb{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[C])} A \exp(\mathbb{C}[C])$, mq $M \in \mathbb{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[C])$.

$\exists A \in \mathbb{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[C]), \exists U \in \mathbb{C}[C]$ tq $M = A \exp(U)$.

Supp $M \in \exp(\mathbb{C}[C])$,

$\exists N \in \mathbb{C}[C] \quad M = \exp(N)$

Donc $\exp(N) = A \exp(U)$

Donc $A = \exp(N)(\exp(U))^{-1} = \exp(N-U) \in \exp(\mathbb{C}[C])$

Absurde. Donc $\boxed{\subseteq}$

Donc $\mathbb{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[C]) = \bigcup_{A \in \mathbb{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[C])} A \exp(\mathbb{C}[C])$

Et $\forall A \in \mathbb{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[C])$, $A \in \text{GL}(\mathbb{C})$ donc

$g: \mathbb{C}[C] \rightarrow \mathbb{C}[C]$ est un $\mathbb{C}^1$ -difféo.
 $M \mapsto A^{-1}M$

Donc $g^{-1}: M \mapsto AM$ est continue et

$g^{-1}(A \exp(\mathbb{C}[C])) = \exp(\mathbb{C}[C])$, ouvert.

Donc $A \exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert donc $\bigcup_{A \in \mathbb{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[C])} A \exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert.

Donc $\mathbb{C} \setminus \exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert.

Donc $\exp(\mathbb{C}[C])$ est ouvert-fermé dans $\mathbb{C}$, connexe.

$\exp(\mathbb{C}[C]) = \mathbb{C}$

• Étape 8: $\text{Mg } \exp(\text{Mn}(\mathbb{C})) = \text{GL}(\mathbb{C})$

$\forall C \in \text{Mn}(\mathbb{C}), \exp(\mathbb{C}[C]) = \mathbb{C}[C] \cap \text{GL}(\mathbb{C})$

Donc en particulier $\forall C \in \text{GL}(\mathbb{C}), C \in \exp(\mathbb{C}[C])$

Donc $\text{GL}(\mathbb{C}) \subset \exp(\text{Mn}(\mathbb{C}))$

et $\exp(\text{Mn}(\mathbb{C})) \subset \text{GL}(\mathbb{C})$ donc $\text{GL}(\mathbb{C}) = \exp(\text{Mn}(\mathbb{C}))$.

(+) - Compléments

(+) un e.v. de dim. finie est complet.

(+) un e.v. de dim. finie est fermé.

(+) $\Pi_M(M) = 0$.

(+) le coef. constant de Π_M est non-nul.

↳ démo: si $P(X) = a_r X^r + \dots + a_1 X + 0$ alors

$$P(X) = X(a_r X^{r-1} + \dots + a_1)$$

or comme $P(M) = 0$ on a alors $M(a_r M^{r-1} + \dots + a_1) = 0$

donc $a_r M^{r-1} + \dots + a_1 = 0$ donc P pas pol. minim.

(+) $\exp(A) \in GL_n(\mathbb{C})$

(+) Si A et B commutent, $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$.

(+) On peut choisir une fonction continue tq

$\det \circ \varphi \circ g$ ne s'annule pas sur $[0, 1]$.

↳ Si $\exists t_0 \in]0, 1[$ tq $\det(\varphi(g(t_0))) = 0$, on sait que

$\det \circ \varphi \circ g \neq 0$ donc il existe un voisinage de t_0 tel que

$\det \circ \varphi \circ g$ ne s'annule qu'en t_0 . on prend alors

$t_1 \in]0, t_0[$ et on construit $h_1: [0, 1] \rightarrow [0, t_1]$

telles que $\det \circ \varphi \circ g \circ h_1$ s'annule une fois de moins que $\det \circ \varphi \circ g$. Au besoin on recommence

↳ autre option: $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ fini $\rightarrow$ connexe par arcs

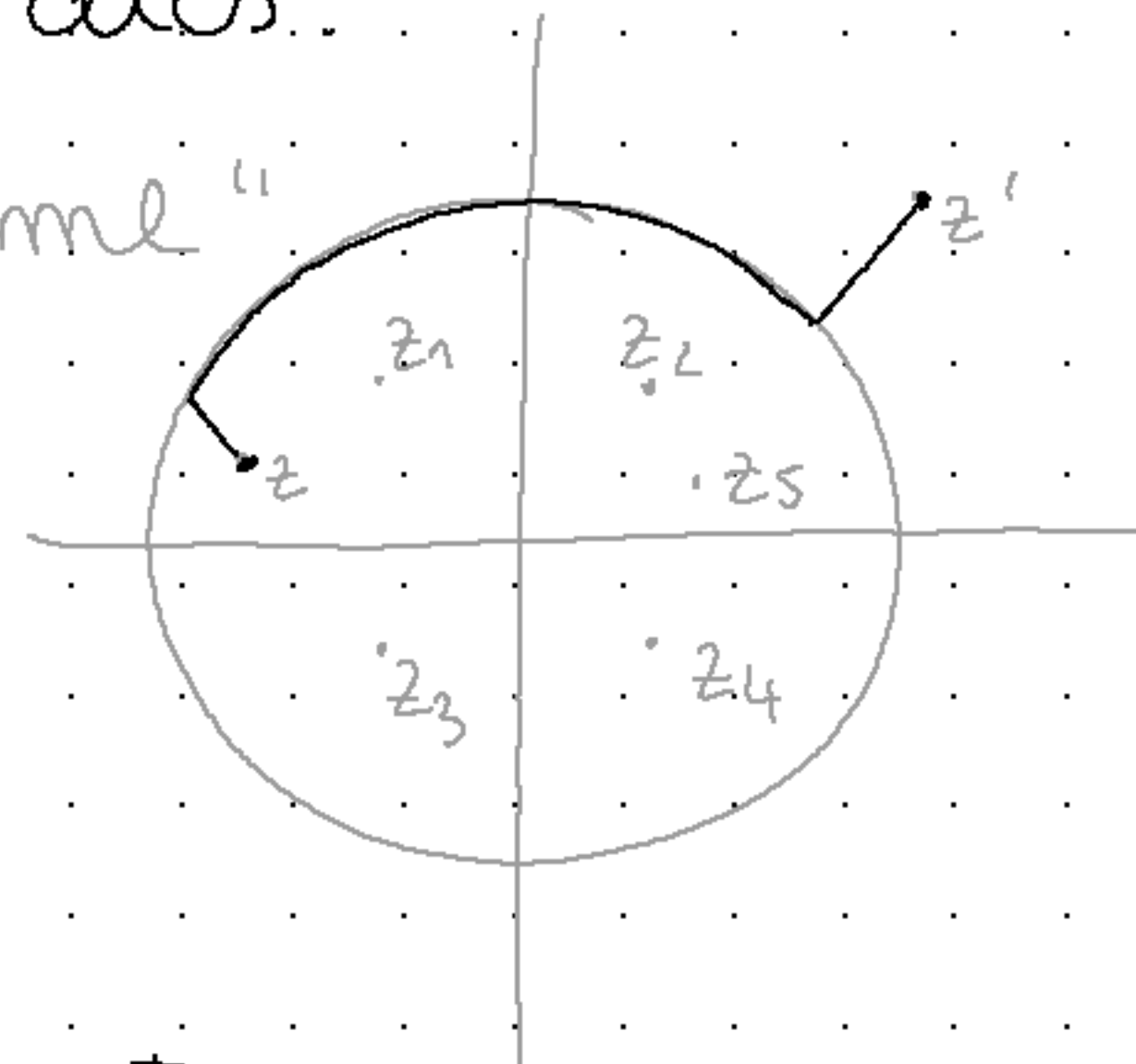
(+) différentielle de $\exp$ en $0_{\text{Mat}(\mathbb{C})}$ est Id .

(+) $\exp: \text{Mat}(\mathbb{C}) \rightarrow \text{GL}(\mathbb{C})$ est $\mathcal{C}^1$.

↳ cf: complément sur la différentielle d'exponentielle.

(+) $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_m\}$ est connexe par arcs.

↳ "ddmaths.free.fr/section209.html"



(+) $D\exp(0) = \text{Id}$ [Rouvière p57]

Soit $X \in \text{Mat}(\mathbb{C})$, $\|X\| < 1$.

$$\exp(X) = \text{Id} + X + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{X^k}{k!} = e^0 + X + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{X^k}{k!}$$

$$\text{Mg } \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{X^k}{k!} = o(\|X\|)$$

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{X^k}{k!} = X^2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{X^k}{(k+2)!}$$

$$\text{Pour } N \in \mathbb{N}, \left\| \sum_{k=0}^N \frac{X^k}{(k+2)!} \right\| \leq \sum_{k=0}^N \|X\|^k = \frac{1 - \|X\|^{N+1}}{1 - \|X\|} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \|X\|}$$

$$\text{Donc } \left\| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{X^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|X\|^2}{1 - \|X\|} \xrightarrow{\|X\| \rightarrow 0} 0 \quad \text{Donc}$$

Donc $D\exp_0(X) = X$, $D\exp_0 = \text{Id}$ ou.

(+) $\exp$ est différentiable sur $\mathbb{C}[\mathbb{C}]$ [Rouvière 117]